

N.B.

Als extraatje staat bij onderstaande uitwerkingen ook de controle van het gevonden antwoord. Deze controle hoeft er niet per se bij natuurlijk, maar als je zeker wilt weten dat je geen fout gemaakt hebt bij het oplossen van het stelsel vergelijkingen, is het handig het gevonden antwoord even in de vergelijkingen te controleren.

Je moet je antwoord dan natuurlijk wel in alle vergelijkingen van het stelsel controleren.

Hierbij kunnen we natuurlijk wel opmerken dat als je een vergelijking gebruikt hebt om de laatste variabele die je nog moest vinden, uit te rekenen, dat je dan je antwoord natuurlijk niet weer in die vergelijking hoeft te controleren, omdat je namelijk al zeker weet dat je antwoord in die vergelijking "past".

Uitwerkingen hoofdstuk 11

11.1

$$\begin{array}{llll} 11.1 \text{ a} & 2x + 3y = 4 & (\text{vgl.1}) & 3 * \text{vgl.1} - 2 * \text{vgl.2} & 6x + 9y = 12 \\ & 3x - 2y = 6 & (\text{vgl.2}) & & \underline{6x - 4y = 12} - \\ & & & & 13y = 0 \quad \text{dus } y=0 \end{array}$$

$$y=0 \text{ in vgl.1: } 2x + 3*0 = 4 \text{ dus } 2x = 4 \text{ en } x=2$$

$$\text{Oplossing: } x=2, y=0$$

Eventueel controleren: $x=2, y=0$ in vgl. 2 geeft $3x - 2y = 3*2 - 2*0 = 6 - 0 = 6$ OK!

$$\begin{array}{llll} 11.1 \text{ b} & 3x + 5y = 8 & (\text{vgl.1}) & \text{vgl.1} + 3 * \text{vgl.2} & 3x + 5y = 8 \\ & -x + 6y = 5 & (\text{vgl.2}) & & \underline{-3x + 18y = 15} + \\ & & & & 23y = 23 \quad \text{dus } y=1 \end{array}$$

$$y=1 \text{ in vgl.1: } 3x + 5*1 = 8 \text{ dus } 3x = 8 - 5 = 3 \text{ en } x=1$$

$$\text{Oplossing: } x=1, y=1$$

Eventueel controleren $x=1, y=1$ in vgl. 2 geeft $-x + 6y = -1 + 6*1 = -1 + 6 = 5$ OK!

$$\begin{array}{llll} 11.1 \text{ c} & 5x + 2y = 3 & (\text{vgl.1}) & 2 * \text{vgl.1} + \text{vgl.2} & 10x + 4y = 6 \\ & 2x - 4y = 6 & (\text{vgl.2}) & & \underline{2x - 4y = 6} + \\ & & & & 12x = 12 \quad \text{dus } x=1 \end{array}$$

$$x = 1 \text{ in vgl.1: } 5*1 + 2y = 3 \text{ dus } 2y = 3 - 5 = -2 \text{ geeft } y = -1$$

$$\text{Oplossing: } x = 1, y = -1$$

Eventueel controleren: $x = 1, y = -1$ in vgl. 2 geeft $2x - 4y = 2*(1) - 4*(-1) = 2 + 4 = 6$ Klopt!

$$\begin{array}{llll} 11.1 \text{ d} & 2x + 5y = 9 & (\text{vgl.1}) & 3 * \text{vgl.1} + 2 * \text{vgl.2} & 6x + 15y = 27 \\ & -3x + 4y = -2 & (\text{vgl.2}) & & \underline{-6x + 8y = -4} + \\ & & & & 23y = 23 \quad \text{dus } y=1 \end{array}$$

$$y=1 \text{ in vgl.1: } 2x + 5*1 = 9 \text{ dus } 2x = 9 - 5 = 4 \text{ geeft } x=2$$

$$\text{Oplossing: } x=2, y=1$$

Eventueel controleren $x=2, y=1$ in vgl. 2 geeft $-3x + 4y = -3*2 + 4*1 = -6 + 4 = -2$ OK!

$$\begin{array}{llll}
11.1 \text{ e} & 2x - 4y = 3 & (\text{vgl.1}) & 2 * \text{vgl.1} - \text{vgl.2} & 4x - 8y = 6 \\
& 4x - 2y = 3 & (\text{vgl.2}) & & \underline{4x - 2y = 3} - \\
& & & & -6y = 3 & \text{dus } y = -\frac{1}{2} \\
& y = -\frac{1}{2} \text{ in vgl.1: } & 2x - 4 * (-\frac{1}{2}) = 3 & \text{dus } 2x + 2 = 3 & \text{geeft } 2x = 1 \text{ en } & x = \frac{1}{2} \\
& \text{Oplossing: } & x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2} & & &
\end{array}$$

Eventueel controleren: $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$ in vgl. 2 geeft $4x - 2y = 4 * \frac{1}{2} - 2 * (-\frac{1}{2}) = 2 + 1 = 3$ Klopt!

11.2

$$\begin{array}{llll}
11.2 \text{ a} & 2x + 5y = 1 & (\text{vgl.1}) & 5 * \text{vgl.1} - 2 * \text{vgl.2} & 10x + 25y = 5 \\
& 5x - 4y = 0 & (\text{vgl.2}) & & \underline{10x - 8y = 0} - \\
& & & & 33y = 5 & \text{dus } y = \frac{5}{33} \\
& y = \frac{5}{33} \text{ in vgl.1: } & 2x + 5 * \frac{5}{33} = 1 & \text{dus } 2x + \frac{25}{33} = 1 & \text{geeft } 2x = \frac{33-25}{33} = \frac{8}{33} \text{ en } & x = \frac{4}{33} \\
& \text{Oplossing: } & x = \frac{4}{33}, y = \frac{5}{33} & & &
\end{array}$$

Eventueel controleren: $x = \frac{4}{33}, y = \frac{5}{33}$ in vgl.2 geeft $5x - 4y = 5 * \frac{4}{33} - 4 * \frac{5}{33} = \frac{20-20}{33} = 0$ OK!

$$\begin{array}{llll}
11.2 \text{ b} & 7x - 5y = 1 & (\text{vgl.1}) & 4 * \text{vgl.1} - 7 * \text{vgl.2} & 28x - 20y = 4 \\
& 4x - 7y = 13 & (\text{vgl.2}) & & \underline{28x - 49y = 91} - \\
& & & & 29y = -87 & \text{dus } y = -\frac{87}{29} = -3 \\
& y = -3 \text{ in vgl.1: } & 7x - 5 * (-3) = 1 & \text{dus } 7x + 15 = 1 & \text{geeft } 7x = 1 - 15 = -14 \text{ en } & x = -\frac{14}{7} = -2 \\
& \text{Oplossing: } & x = -2, y = -3 & & &
\end{array}$$

Eventueel controleren: $x = -2, y = -3$ in vgl.2 geeft $4x - 7y = 4 * (-2) - 7 * (-3) = -8 + 21 = 13$ OK!

$$\begin{array}{llll}
11.2 \text{ c} & x - 3y = 7 & (\text{vgl.1}) & 5 * \text{vgl.1} + \text{vgl.2} & 5x - 15y = 35 \\
& -5x + 2y = 4 & (\text{vgl.2}) & & \underline{-5x + 2y = 4} + \\
& & & & -13y = 39 & \text{dus } y = -\frac{39}{13} = -3 \\
& y = -3 \text{ in vgl.1: } & x - 3 * (-3) = 7 & \text{dus } x + 9 = 7 & \text{geeft } x = 7 - 9 = -2 & \text{dus } x = -2 \\
& \text{Oplossing: } & x = -2, y = -3 & & &
\end{array}$$

Eventueel controleren $x = -2, y = -3$ in vgl. 2 geeft $-5x + 2y = -5 * (-2) + 2 * (-3) = 10 - 6 = 4$ Klopt!

$$\begin{array}{llll}
11.2 \text{ d} & 2x - 2y = 6 & (\text{vgl.1}) & 3 * \text{vgl.1} - 2 * \text{vgl.2} & 6x - 6y = 18 \\
& 3x + 4y = -5 & (\text{vgl.2}) & & \underline{6x + 8y = -10} - \\
& & & & -14y = 28 & \text{dus } y = -\frac{28}{14} = -2 \\
& y = -2 \text{ in vgl.1: } & 2x - 2 * (-2) = 6 & \text{dus } 2x + 4 = 6 & \text{geeft } 2x = 6 - 4 = 2 \text{ en } & x = 1 \\
& \text{Oplossing: } & x = 1, y = -2 & & &
\end{array}$$

Eventueel controleren: $x = 1, y = -2$ in vgl.2 geeft $3x + 4y = 3 * 1 + 4 * (-2) = 3 - 8 = -5$ OK!

11.2 e $7x + 5y = 1$ (vgl.1) $4 \cdot \text{vgl.1} + 5 \cdot \text{vgl.2}$ $28x + 20y = 4$
 $3x - 4y = 25$ (vgl.2) $15x - 20y = 125$ +
 $43x = 129$ dus $x = \frac{129}{43} = 3$
 $x = 3$ in vgl.1: $7 \cdot 3 + 5y = 1$ dus $21 + 5y = 1$ geeft $5y = -20$ en $y = \frac{-20}{5} = -4$
 Oplossing: $x=3, y=-4$
 Eventueel controleren $x=3, y=-4$ in vgl. 2 geeft $3x - 4y = 3 \cdot 3 - 4 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$ Klopt!

11.3

11.3 a $2x + 3y = 2$ (vgl.1) $3 \cdot \text{vgl.1} - 2 \cdot \text{vgl.2}$ $6x + 9y = 6$
 $3x + 4y = 2$ (vgl.2) $6x + 8y = 4$ -
 $y = 2$
 $y=2$ in vgl.1: $2x + 3 \cdot 2 = 2$ dus $2x + 6 = 2$ geeft $2x = 2 - 6 = -4$ en $x=-2$
 Oplossing: $x=-2, y=2$
 Eventueel controleren: $x=-2, y=2$ in vgl. 2 geeft $3x + 4y = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = -6 + 8 = 2$ OK!

11.3 b $2x - 3y = 1$ (vgl.1) $3 \cdot \text{vgl.1} - 2 \cdot \text{vgl.2}$ $6x - 9y = 3$
 $3x - 4y = 0$ (vgl.2) $6x - 8y = 0$ -
 $-y = 3$ en $y = -3$
 $y=-3$ in vgl.1: $2x - 3 \cdot (-3) = 1$ dus $2x + 9 = 1$ geeft $2x = 1 - 9 = -8$ en $x=-4$
 Oplossing: $x=-4, y=-3$
 Eventueel controleren: $x=-4, y=-3$ in vgl. 2 geeft $3x - 4y = 3 \cdot (-4) - 4 \cdot (-3) = -12 + 12 = 0$ OK!

11.3 c $2x + 3y = 4$ (vgl.1) $3 \cdot \text{vgl.1} - 2 \cdot \text{vgl.2}$ $6x + 9y = 12$
 $3x + 5y = 1$ (vgl.2) $6x + 10y = 2$ -
 $-y = 10$ dus $y = -10$
 $y = -10$ in vgl.1: $2x + 3 \cdot (-10) = 4$ dus $2x - 30 = 4$ geeft $2x = 4 + 30 = 34$ en $x = 17$
 Oplossing: $x = 17, y = -10$
 Eventueel controleren: $x=17, y=-10$ in vgl. 2 geeft $3x + 5y = 3 \cdot (17) + 5 \cdot (-10) = 51 - 50 = 1$ Klopt!

11.3 d $2x - 7y = 5$ (vgl.1) $\text{vgl.1} - 2 \cdot \text{vgl.2}$ $2x - 7y = 5$
 $x - 4y = -1$ (vgl.2) $2x - 8y = -2$ -
 $y = 7$
 $y=7$ in vgl.2: $x - 4 \cdot 7 = -1$ dus $x - 28 = -1$ geeft $x = -1 + 28 = 27$
 Oplossing: $x=27, y=7$
 Eventueel controleren: $x=27, y=7$ in vgl. 1 geeft $2x - 7y = 2 \cdot (27) - 7 \cdot 7 = 54 - 49 = 5$ OK!

11.3 e $4x - 7y = 8$ (vgl.1) $3 \cdot \text{vgl.1} - 4 \cdot \text{vgl.2}$ $12x - 21y = 24$
 $3x - 5y = 4$ (vgl.2) $\underline{12x - 20y = 16 -}$
 $-y = 8$ dus $y = -8$
 $y = -8$ in vgl.1: $4x - 7 \cdot (-8) = 8$ dus $4x + 56 = 8$ geeft $4x = 8 - 56 = -48$ en $x = -12$
 Oplossing: $x = -12, y = -8$
 Eventueel controleren: $x = -12, y = -8$ in vgl. 2 geeft $3x - 5y = 3 \cdot (-12) - 5 \cdot (-8) = -36 + 40 = 4$ Klopt!

11.4

11.4 a $x - 5y = 4$ (vgl.1) $3 \cdot \text{vgl.1} - \text{vgl.2}$ $3x - 15y = 12$
 $3x + 4y = 1$ (vgl.2) $\underline{3x + 4y = 1 -}$
 $-19y = 11$ dus $y = -\frac{11}{19}$
 $y = -\frac{11}{19}$ in vgl.1: $x - 5 \cdot \left(-\frac{11}{19}\right) = 4$ dus $x + \frac{55}{19} = 4$ geeft $x = \frac{76-55}{19} = \frac{21}{19}$
 Oplossing: $x = \frac{21}{19}, y = -\frac{11}{19}$
 Eventueel controleren: $x = \frac{21}{19}, y = -\frac{11}{19}$ in vgl.2 geeft $3x + 4y = 3 \cdot \frac{21}{19} + 4 \cdot -\frac{11}{19} = \frac{63-44}{19} = \frac{19}{19} = 1$ OK!

11.4 b $3x - 7y = 2$ (vgl.1) $\text{vgl.1} - \text{vgl.2}$ $3x - 7y = 2$
 $3x - 4y = -2$ (vgl.2) $\underline{3x - 4y = -2 -}$
 $-3y = 4$ dus $y = -\frac{4}{3}$
 $y = -\frac{4}{3}$ in vgl.1: $3x - 7 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = 2$ dus $3x + \frac{28}{3} = 2$ geeft $3x = \frac{6-28}{3} = -\frac{22}{3}$ en $x = -\frac{22}{9}$
 Oplossing: $x = -\frac{22}{9}, y = -\frac{4}{3}$
 Eventueel controleren: $x = -\frac{22}{9}, y = -\frac{4}{3}$ in vgl.2 geeft $3x - 4y = 3 \cdot \left(-\frac{22}{9}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{-22+16}{3} = -\frac{6}{3} = -2$

11.4 c $2x + 9y = 5$ (vgl.1) $\text{vgl.1} + 2 \cdot \text{vgl.2}$ $2x + 9y = 5$
 $-x - 4y = 2$ (vgl.2) $\underline{-2x - 8y = 4 +}$
 $y = 9$
 $y = 9$ in vgl.2: $-x - 4 \cdot 9 = 2$ dus $-x - 36 = 2$ geeft $-x = 2 + 36 = 38$ en $x = -38$
 Oplossing: $x = -38, y = 9$
 Eventueel controleren $x = -38, y = 9$ in vgl. 1 geeft $2x + 9y = 2 \cdot (-38) + 9 \cdot 9 = -76 + 81 = 5$ Klopt!

11.4 d $6x + 5y = 1$ (vgl.1) $6 \cdot \text{vgl.1} - 5 \cdot \text{vgl.2}$ $36x + 30y = 6$
 $7x + 6y = 2$ (vgl.2) $\underline{35x + 30y = 10 -}$
 $x = -4$
 $x = -4$ in vgl.1: $6 \cdot (-4) + 5y = 1$ dus $-24 + 5y = 1$ geeft $5y = 1 + 24 = 25$ en $y = \frac{25}{5} = 5$
 Oplossing: $x = -4, y = 5$
 Eventueel controleren: $x = -4, y = 5$ in vgl.2 geeft $7x + 6y = 7 \cdot (-4) + 6 \cdot 5 = -28 + 30 = 2$ OK!

$$\begin{array}{rcl}
 11.4 \text{ e } & 5x - 3y = 7 & \text{(vgl.1)} & 5 \cdot \text{vgl.1} - 3 \cdot \text{vgl.2} & 25x - 15y = 35 \\
 & 8x - 5y = 2 & \text{(vgl.2)} & & \underline{24x - 15y = 6} \\
 & & & & x = 29
 \end{array}$$

$x = 29$ in vgl.1: $5 \cdot 29 - 3y = 7$ dus $145 - 3y = 7$ geeft $-3y = 7 - 145 = -138$ en $y = 46$

Oplissing: $x=29, y=46$

Eventueel controleren $x=29, y=46$ in vgl. 2 geeft $8x - 5y = 8 \cdot 29 - 5 \cdot 46 = 232 - 230 = 2$ Klopt!

11.5

a.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(vgl.1)} & x + 3y + z = 1 & *2 \rightarrow 2x + 6y + 2z = 2 \\
 \text{(vgl.2)} & 2x - y - 3z = -8 & \rightarrow 2x - y - 3z = -8 \\
 \text{(vgl.3)} & -3x + 2y + 2z = 7 & \underline{\hspace{2cm}} - \\
 & & 7y + 5z = 10 \quad \text{(vgl.4)}
 \end{array}$$

3*

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(vgl.1):} & 3x + 9y + 3z = 3 \\
 \text{(vgl.3):} & \underline{-3x + 2y + 2z = 7} + \\
 & 11y + 5z = 10 \quad \text{(vgl.5)}
 \end{array}$$

$$\text{(vgl.4): } 7y + 5z = 10$$

$$\text{(vgl.5): } \underline{11y + 5z = 10} -$$

$$-4y = 0 \quad \rightarrow y = 0$$

$$\text{Substitueer } y \text{ in vgl.4} \rightarrow 7 \cdot 0 + 5z = 10 \rightarrow z = \frac{10}{5} = 2$$

$$\text{Substitueer } y \text{ en } z \text{ in vgl.1} \rightarrow x + 3 \cdot 0 + 2 = 1 \rightarrow x = 1 - 2 = -1$$

Eventueel controleren in de andere 2 vergelijkingen:

$$x = -1 \text{ en } y = 0 \text{ en } z = 2 \text{ in vgl.2: } 2 \cdot (-1) - 0 - 3 \cdot 2 = -2 - 6 = -8 \text{ klopt!}$$

$$x = -1 \text{ en } y = 0 \text{ en } z = 2 \text{ in vgl.3: } -3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7 \text{ klopt!}$$

b. (vgl.1) $x - 4y + z = -2 \rightarrow *2: 2x - 8y + 2z = -4$
 (vgl.2) $-2x + 3y - 2z = -1 \rightarrow \underline{-2x + 3y - 2z = -1 +}$
 (vgl.3) $-4x + y + z = -2 \quad -5y = -5 \rightarrow y = 1$ (vgl.4)

4* (vgl.1): $4x - 16y + 4z = -8$
 (vgl.3): $\underline{-4x + y + z = -2 +}$
 $-15y + 5z = -10$ (vgl.5)

Substitueer y in vgl.5: $-15*1 + 5z = -10 \rightarrow 5z = -10 + 15 = 5 \rightarrow z = \frac{5}{5} = 1$

Substitueer y en z in vgl.1: $x - 4*1 + 1 = -2 \rightarrow x = -2 - 1 + 4 = 1$

Eventueel controleren in de andere 2 vergelijkingen:

$x = 1$ en $y = 1$ en $z = 1$ in vgl.2: $-2*1 + 3*1 - 2*1 = -1$ klopt!

$x = 1$ en $y = 1$ en $z = 1$ in vgl.3: $-4*1 + 1 + 1 = -2$ klopt!

c. In vgl.3 ontbreekt de z! Gebruik nu vgl.1 en vgl.2 om hieruit ook de z te elimineren.

(vgl.1) $-2x + 2y + 3z = -3 \quad *4 \rightarrow -8x + 8y + 12z = -12$

(vgl.2) $x - 2y + 4z = 8 \quad *3 \rightarrow 3x - 6y + 12z = 24$

(vgl.3) $-3x + y = -7$
 $\underline{\hspace{10em} -}$
 $-11x + 14y = -36$ (vgl.4)

(vgl.4): $-11x + 14y = -36$

14* (vgl.3): $\underline{-42x + 14y = -98} \quad -$

$31x = 62$ (vgl.5) $\rightarrow x = 2$

Substitueer x in vgl.3 $\rightarrow -3*2 + y = -7 \rightarrow y = -7 + 6 = -1$

Substitueer x en y in vgl.1 $\rightarrow -2*2 + 2*(-1) + 3z = -3 \rightarrow z = \frac{-3+4+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

Eventueel controleren in de andere 2 vergelijkingen:

$x = 2$ en $y = -1$ en $z = 1$ in vgl.2: $2 - 2*(-1) + 4*1 = 8$ klopt!

$x = 2$ en $y = -1$ in vgl.3: $-3*2 + (-1) = -7$ klopt!

d. (vgl.1) $4x - 3y + z = 2 \rightarrow 4x - 3y + z = 2$
 (vgl.2) $-2x - y - 2z = 2 \quad *2 \rightarrow -4x - 2y - 4z = 4$
 (vgl.3) $-x + 2y + 4z = -9$ $\underline{\hspace{2cm}}$ +
 $-5y - 3z = 6$ (vgl.4)

(vgl.2): $-2x - y - 2z = 2$

2* (vgl.3): $\underline{-2x + 4y + 8z = -18}$ -
 $-5y - 10z = 20$ (vgl.5)

(vgl.4): $-5y - 3z = 6$

(vgl.5): $\underline{-5y - 10z = 20}$ -

$7z = -14 \rightarrow z = -2$

Substitueer z in vgl.4 $\rightarrow -5y - 3*(-2) = 6 \rightarrow y = \frac{6-6}{-5} = 0$

Substitueer y en z in vgl.1 $\rightarrow 4x - 3*0 + (-2) = 2 \rightarrow x = \frac{2+2}{4} = 1$

Eventueel controleren in de andere 2 vergelijkingen:

$x = 1$ en $y = 0$ en $z = -2$ in vgl.2: $-2*1 - 0 - 2*(-2) = 2$ klopt!

$x = 1$ en $y = 0$ en $z = -2$ in vgl.3: $-1*1 + 2*0 + 4*(-2) = -9$ klopt!

e. In vgl.3 ontbreekt de y! Gebruik nu vgl.1 en vgl.2 om hieruit ook de y te elimineren.

(vgl.1) $x - 3y + z = -9 \rightarrow x - 3y + z = -9$

(vgl.2) $x - y - 2z = -6 \quad *3 \rightarrow 3x - 3y - 6z = -18$

(vgl.3) $-4x + 3z = 7$ $\underline{\hspace{2cm}}$ -
 $-2x + 7z = 9$ (vgl.4)

2* (vgl.4): $-4x + 14z = 18$

(vgl.3): $\underline{-4x + 3z = 7}$ -

$11z = 11$ (vgl.5) $\rightarrow z = 1$

$$\text{Substitueer } z \text{ in vgl.3} \rightarrow -4x + 3 \cdot 1 = 7 \quad \rightarrow x = \frac{7-3}{-4} = -1$$

$$\text{Substitueer } x \text{ en } z \text{ in vgl.1} \rightarrow -1 - 3y + 1 = -9 \quad \rightarrow y = \frac{-9}{-3} = 3$$

Eventueel controleren in de andere 2 vergelijkingen:

$$x = -1 \text{ en } y = 3 \text{ en } z = 1 \text{ in vgl.2:} \quad -1 - 3 - 2 \cdot 1 = -6 \quad \text{klopt!}$$

$$x = -1 \text{ en } z = 1 \quad \text{in vgl.3:} \quad -4 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 7 \quad \text{klopt!}$$

11.6

$$\text{a. (vgl.1)} \quad x - 5y + z = -2 \quad \rightarrow \quad x - 5y + z = -2$$

$$\text{(vgl.2)} \quad x - 3y - 2z = 1 \quad \rightarrow \quad x - 3y - 2z = 1$$

$$\text{(vgl.3)} \quad -3x + 5y + 7z = -4 \quad \begin{array}{r} \hline - \\ -2y + 3z = -3 \quad \text{(vgl.4)} \end{array}$$

$$3^* \text{ (vgl.2):} \quad 3x - 9y - 6z = 3$$

$$\text{(vgl.3):} \quad \underline{-3x + 5y + 7z = -4} \quad + \\ -4y + z = -1 \quad \text{(vgl.5)}$$

$$2^* \text{ (vgl.4):} \quad -4y + 6z = -6$$

$$\text{(vgl.5):} \quad \underline{-4y + z = -1} \quad - \\ 5z = -5 \quad \rightarrow \quad z = -1$$

$$\text{Substitueer } z \text{ in vgl.4} \rightarrow -2y + 3 \cdot (-1) = -3 \quad \rightarrow y = \frac{-3+3}{-2} = 0$$

$$\text{Substitueer } y \text{ en } z \text{ in vgl.1} \rightarrow x - 5 \cdot 0 + (-1) = -2 \quad \rightarrow x = -2 + 1 = -1$$

Eventueel controleren in de andere 2 vergelijkingen:

$$x = -1 \text{ en } y = 0 \text{ en } z = -1 \text{ in vgl.2:} \quad -1 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 1 \quad \text{klopt!}$$

$$x = -1 \text{ en } y = 0 \text{ en } z = -1 \text{ in vgl.3:} \quad -3 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + 7 \cdot (-1) = -4 \quad \text{klopt!}$$

b. (vgl.1) $-2x - y + 2z = 5 \rightarrow -2x - y + 2z = 5$
 (vgl.2) $x + y - z = -3 \quad 2^* \rightarrow 2x + 2y - 2z = -6$
 (vgl.3) $-3x + 2y - 6z = -5$

$$\frac{\qquad\qquad\qquad}{y} + \qquad = -1 \text{ (vgl.4)}$$

y = -1 in vgl.2 en vgl.3

(vgl.2): $x - 1 - z = -3 \rightarrow x - z = -2 \quad 3^* \rightarrow 3x - 3z = -6$
 (vgl.3): $-3x - 2 - 6z = -5 \rightarrow -3x - 6z = -3 \rightarrow \underline{-3x - 6z = -3} +$

$$-9z = -9 \rightarrow z = 1$$

Substitueer y en z in vgl.1: $-2x - (-1) + 2 \cdot 1 = 5 \rightarrow x = \frac{5-1-2}{-2} = -1$

Eventueel controleren in de andere 2 vergelijkingen:

x = -1 en y = -1 en z = 1 in vgl.2: $-1 + (-1) - 1 = -3$ klopt!
 x = -1 en y = -1 en z = 1 in vgl.3: $-3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 = -5$ klopt!

c. In vgl.2 ontbreekt de x! Gebruik nu vgl.1 en vgl.3 om hieruit ook de x te elimineren.

(vgl.1) $x - 6y + z = -8 \quad 3^* \rightarrow 3x - 18y + 3z = -24$
 (vgl.2) $-y - 2z = -1$
 (vgl.3) $-3x + 2y + 4z = 8 \rightarrow \underline{-3x + 2y + 4z = 8} +$

$$-16y + 7z = -16 \text{ (vgl.4)}$$

16* (vgl.2): $-16y - 32z = -16$

(vgl.4): $\underline{-16y + 7z = -16} -$

$$-39z = 0 \rightarrow z = 0$$

Substitueer z in vgl.2 $\rightarrow -y - 2 \cdot 0 = -1 \rightarrow y = 1$

Substitueer y en z in vgl.1 $\rightarrow x - 6 \cdot 1 + 0 = -8 \rightarrow x = -8 + 6 = -2$

Eventueel controleren in de andere 2 vergelijkingen:

x = -2 en y = 1 en z = 0 in vgl.3: $-3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 8$ klopt!
 y = 1 en z = -2 in vgl.2: $-1 - 2 \cdot 0 = -1$ klopt!

d. (vgl.1) $x - 2y + z = -5$ $2^* \rightarrow 2x - 4y + 2z = -10$
 (vgl.2) $-3x - y - 3z = 1$
 (vgl.3) $-2x - 3y + 2z = -8 \rightarrow \underline{-2x - 3y + 2z = -8} +$
 $-7y + 4z = -18$ (vgl.4)

3* (vgl.1): $3x - 6y + 3z = -15$
 (vgl.2): $\underline{-3x - y - 3z = 1} +$
 $-7y = -14 \rightarrow y=2$

Substitueer y in vgl.4 $\rightarrow -7*2 + 4z = -18 \rightarrow z = \frac{-18+14}{4} = -1$

Substitueer y en z in vgl.1 $\rightarrow x - 2*2 + (-1) = -5 \rightarrow x = -5 + 5 = 0$

Eventueel controleren in de andere 2 vergelijkingen:

$x = 0$ en $y = 2$ en $z = -1$ in vgl.2: $-3*0 - 2 - 3*(-1) = 1$ klopt!

$x = 0$ en $y = 2$ en $z = -1$ in vgl.3: $-2*0 - 3*2 + 2*(-1) = -8$ klopt!

e. In vgl.2 ontbreekt de x, in vergelijking 3 ontbreekt de z!

Gebruik nu vgl.1 en vgl.3 om hieruit ook de x te elimineren

[Of gebruik vgl.1 en vgl.2 om hieruit de z te elimineren.]

(vgl.1) $x - 8y + 3z = -9$

(vgl.2) $-2y - 3z = 1$

(vgl.3) $-4x + 5y = -3$

4* (vgl.1): $4x - 32y + 12z = -36$

(vgl.3): $\underline{-4x + 5y = -3} +$
 $-27y + 12z = -39$ (vgl.4)

2* (vgl.4): $-54y + 24z = -78$

27* (vgl.2): $\underline{-54y - 81z = 27} -$
 $105z = -105$ (vgl.5) $\rightarrow z = -1$

$$\text{Substitueer } z \text{ in vgl.2} \rightarrow -2y - 3*(-1) = 1 \quad \rightarrow y = \frac{1-3}{-2} = 1$$

$$\text{Substitueer } y \text{ en } z \text{ in vgl.1} \rightarrow x - 8*1 + 3*(-1) = -9 \quad \rightarrow x = -9 + 3 + 8 = 2$$

Eventueel controleren in de andere 2 vergelijkingen:

$$y = 1 \text{ en } z = -1 \text{ in vgl.2:} \quad -2*1 - 3*(-1) = 1 \quad \text{klopt!}$$

$$x = 2 \text{ en } y = 1 \text{ in vgl.3:} \quad -4*2 + 5*1 = -3 \quad \text{klopt!}$$

11.7

a. (vgl.1) $x - 2y + z = 0$

(vgl.2) $x - y - 3z = 4$

(vgl.3) $-4x + 6y + 4z = -8$

(vgl.1): $x - 2y + z = 0$

(vgl.2): $\underline{x - y - 3z = 4} \quad -$

$$-y + 4z = -4 \quad (\text{vgl.4})$$

4* (vgl.1): $4x - 8y + 4z = 0$

(vgl.3): $\underline{-4x + 6y + 4z = -8} \quad +$

$$-2y + 8z = -8 \quad (\text{vgl.5})$$

2* (vgl.4): $-2y + 8z = -8$

(vgl.5): $\underline{-2y + 8z = -8} \quad -$

$$0y + 0z = 0$$

Hier vallen zowel y als z weg. Welke getallen je ook voor y en z zult nemen, de uitkomst klopt altijd!

y en z zijn onderling wel afhankelijk $-y + 4z = -4$ blijft wel gelden, als je een z kiest ligt y vast, en daarmee ligt dan ook de x vast. Bijvoorbeeld het kiezen van $z=1$ levert $-y + 4 = -4$, dus $y = 8$. En daarmee dan ook weer $x - 2*8 + 1 = 0$, dus $x=15$ (vgl. 1).

Maar door de keuze van z heb je wel oneindig veel mogelijkheden.

Dus oneindig veel oplossingen is het antwoord op deze vraag.

b. (vgl.1) $x - 2y + z = 1$

(vgl.2) $x - y - 3z = 4$

(vgl.3) $-4x + 6y + 4z = -9$

[Deze opgave lijkt veel op opgave 1, alleen de rechterleden van vgl.1 en vgl.3 verschillen.]

(vgl.1): $x - 2y + z = 1$

(vgl.2): $\underline{x - y - 3z = 4} \quad -$

$-y + 4z = -3 \quad (\text{vgl.4})$

4* (vgl.1): $4x - 8y + 4z = 4$

(vgl.3): $\underline{-4x + 6y + 4z = -9} \quad +$

$-2y + 8z = -5 \quad (\text{vgl.5})$

2* (vgl.4): $-2y + 8z = -6$

(vgl.5): $\underline{-2y + 8z = -5} \quad -$

$0y + 0z = -1 \quad (\text{vgl.6})$

Geen oplossing!

In vgl.6 kun je nooit waarden voor y en z invullen zodat de vergelijking klopt.

De twee vergelijkingen vgl.4 en vgl.5 hierboven zijn identiek (aan de linker zijde) maar hebben een verschillende rechterzijde: dus geen oplossing mogelijk.

Dit noemen we een strijdig stelsel vergelijkingen.

c. (vgl.1) $x - 3y + z = -1$

(vgl.2) $-2x + y = 5$

(vgl.3) $5y - 2z = -3$

$$2^* \quad (\text{vgl.1):} \quad 2x - 6y + 2z = -2$$

$$(\text{vgl.2):} \quad \underline{-2x + y} = 5 \quad +$$

$$-5y + 2z = 3 \quad (\text{vgl.4})$$

$$(\text{vgl.4):} \quad -5y + 2z = 3$$

$$(\text{vgl.3):} \quad \underline{5y - 2z} = -3 \quad +$$

$$0y + 0z = 0 \quad (\text{vgl.5})$$

Ook hier zijn er oneindig veel mogelijkheden. Zie opgave 11.7a.

11.8

$$\text{a.} \quad (\text{vgl.1}) \quad x - 3y + z = -2$$

$$(\text{vgl.2}) \quad -2x + y = 4$$

$$(\text{vgl.3}) \quad 5y - 2z = -1$$

$$2^* \quad (\text{vgl.1):} \quad 2x - 6y + 2z = -4$$

$$(\text{vgl.2):} \quad \underline{-2x + y} = 4 \quad +$$

$$-5y + 2z = 0 \quad (\text{vgl.4})$$

$$(\text{vgl.4):} \quad -5y + 2z = 0$$

$$(\text{vgl.3):} \quad \underline{5y - 2z} = -1 \quad +$$

$$0y + 0z = -1$$

Geen oplossing ! Zie ook opgave 11.7b

Op deze manier (de eliminatie methode), toegepast op twee verschillende sets vergelijkingen uit hetzelfde stelsel, komen twee verschillende waarden naar boven voor dezelfde variabele: een strijdig stelsel.

Geen oplossingen!

b. (vgl.1) $x + 5y - 2z = 5$

(vgl.2) $2x - 4z = 1$

(vgl.3) $-x + 5y + 2z = -4$

(vgl.1): $x + 5y - 2z = 5$

(vgl.3): $-x + 5y + 2z = -4$ +

$$10y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{10}$$

2* (vgl.1): $2x + 10y - 4z = 10$

(vgl.2): $2x - 4z = 1$ -

$$10y = 9 \rightarrow y = \frac{9}{10}$$

Dit stelsel is strijdig.

Geen oplossingen.

c. (vgl.1) $x + 5y - 2z = 4$

(vgl.2) $2x - 4z = -2$

(vgl.3) $-x + 5y + 2z = 6$

(vgl.1): $x + 5y - 2z = 4$

(vgl.3): $-x + 5y + 2z = 6$ +

$$10y = 10 \text{ (vgl.4)} \rightarrow y = 1$$

(vgl.1): $x + 5y - 2z = 4$

(vgl.3): $-x + 5y + 2z = 6$ -

$$2x - 4z = -2 \text{ (vgl.5)}$$

$$\text{(vgl.2)} \quad 2x - 4z = -2$$

$$\text{(vgl.5)} \quad \underline{2x - 4z = -2} \quad -$$

$$0x + 0z = 0$$

Oneindig veel oplossingen!