

Proeftoets wiskunde A

Beschikbare tijd 1,5 uur.

Vraag 1: corona (20 punten)

Corona is een virus en het is erg besmettelijk. Het reproductiegetal R geeft aan hoeveel mensen gemiddeld besmet worden door iemand die besmet is met het coronavirus. In deze opgave maken we de volgende aannames met betrekking tot het coronavirus:

- Iemand die ziek wordt, is precies één week besmettelijk. Alleen in die week dat hij ziek is, kan hij andere personen besmetten;
- Het reproductiegetal (R) is het gemiddelde aantal (gezonde) personen die door één zieke worden besmet.
- In deze opgave wordt geen rekening gehouden met coronamaatregelen om het reproductiegetal te beheersen. Er wordt ook geen rekening gehouden met eventuele extra vatbaarheid om ziek te worden van corona binnen bepaalde doelgroepen in Nederland of met eventuele seizoensinvloeden, etc.

Stel dat een persoon aan het begin van week 50 corona oploopt, dan kan hij in die week 3 andere personen besmetten.

Nu er een vaccin is tegen corona, worden er minder personen ziek. Vaccinatie van een deel van de bevolking leidt er toe dat het gemiddelde aantal personen dat besmet wordt kleiner wordt en wordt weergegeven door de volgende formule:

$$R_v = R \cdot \left(1 - \frac{P}{100}\right) \quad (\text{formule 1})$$

Waarbij R_v aangeeft hoeveel mensen gemiddeld besmet worden door iemand die besmet is met het coronavirus na vaccinatie, R het reproductiegetal en P de vaccinatiegraad is (als $P = 1$, dan is 1% van de bevolking gevaccineerd). Als $R_v = 1$ blijft het aantal besmettingen gelijk, als $R_v > 1$ neemt het aantal besmettingen toe en als $R_v < 1$ neemt het aantal besmettingen af.

Vraag 1a

Laat m.b.v. een voorbeeld zien dat bij een hogere vaccinatiegraad het gemiddeld aantal personen dat besmet wordt kleiner wordt. **(3 punten)**

Antwoord

1 punt: Als p groter wordt, wordt $\frac{p}{100}$ groter

1 punt: wordt $1 - \frac{p}{100}$ kleiner

1 punt: Dus wordt $R \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ kleiner (en dus wordt B_v kleiner)

Vraag 1b

Bereken met behulp van formule 1 hoe hoog de vaccinatiegraad minimaal moet zijn om ervoor te zorgen dat corona zich niet uitbreidt als $R=3$. Rond je antwoord af op een geheel getal. **(4 punten)**

Antwoord

2 punt: De vergelijking $3 \cdot (1 - p/100) = 1$

1 punt: $(1 - p/100) = 1/3$ (beide kanten delen door 3)

1 punt: $p/100 = 2/3$, dat geeft voor $p = 67\%$

Vraag 1c

Stel in week 22 lopen duizend personen corona op. Bereken dan het gemiddelde aantal personen dat besmet is in week 28 waarbij $R = 3$ en er niet gevaccineerd is. **(2 punten)**

Antwoord

Zonder vaccinatie is in week 28 het aantal personen die ziek worden van corona:
2 punt: $1000 * 3^6 = 729.000$

Vraag 1d

Ga uit van dezelfde gegevens als hierboven (1c) maar met het gegeven dat 14% van de bevolking gevaccineerd is. Bereken opnieuw het gemiddeld aantal personen dat besmet is met corona in week 28. **(2 punten)**

Antwoord

1 punt: Er geldt $R_v = 3 * \left(1 - \frac{14}{100}\right) = 2,58$
1 punt: $1000 * 2,58^6 = 294.930$

Vraag 1e

Bereken het procentuele verschil tussen wel en geen vaccinatie ten opzichte van de berekende gegevens uit de vorige 2 vragen. **(1 punten)**

Antwoord

1 punt: $\frac{729.000 - 294.930}{729.000} * 100 = 60\%$

Vraag 1f

In een situatie waarbij $R_v = 1$ kan formule 1 herleid worden tot de volgende formule:

$$p = 100 - \frac{100}{R} \quad (\text{formule 2})$$

Laat deze herleiding zien. **(4 punten)**

Antwoord

$$R * \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1$$

$$\frac{1}{R} = 1 - \frac{p}{100} \quad (\text{beide kanten delen door } R)$$

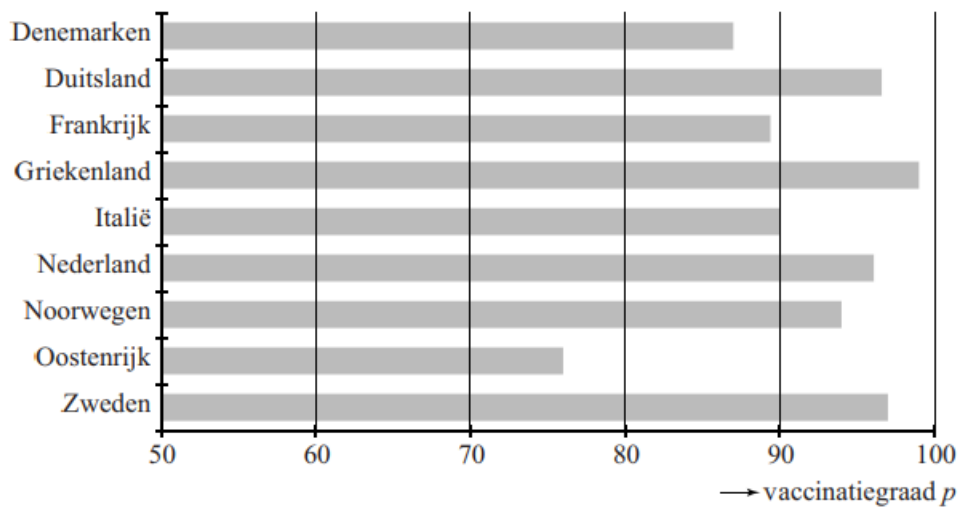
$$\frac{p}{100} = 1 - \frac{1}{R} \quad (\text{beide kanten } -1)$$

$$p = 100 \left(1 - \frac{1}{R}\right) \quad (\text{beide kanten } * 100), \text{ dus } p = 100 - \frac{100}{R}$$

Vraag 1g

In de onderstaande figuur is een voorspelling weergegeven van de vaccinatiegraad omtrent corona op 31 december 2021 van de verschillende landen binnen de Europese Unie. Door de verschillende mutaties blijkt corona besmettelijker te zijn. Voor Corona geldt $R = 5,5$.

figuur



Bereken in welke land(en) uit deze figuur corona zich zal uitbreiden. (4 punten)

Antwoord

1 punt: $R = 5,5$, $p = 100 - \frac{100}{R}$

1 punt: $p = 100 - \frac{100}{5,5} = 81,81 \dots = 82\%$

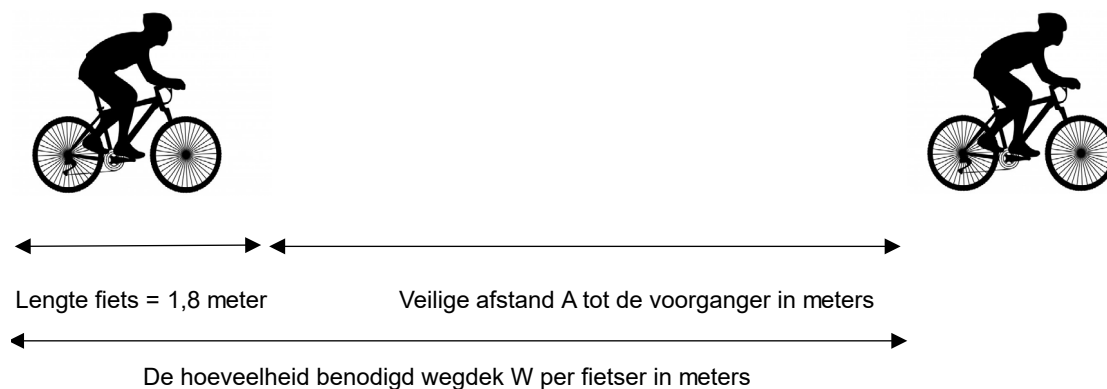
1 punt: dus $p < 82\%$ (dan is $B_v > 1$)

1 punt: In Oostenrijk kan corona zich uitbreiden.

Opgave 2: Fietssnelweg (14 punten)

Er wordt op dit moment gewerkt aan een fietssnelweg tussen Assen en Groningen, waarop speedbikes kunnen fietsen met een snelheid van max. 45 km per uur. Speedbikes zijn elektrische fietsen die snelheden tot 45 km per uur kunnen bereiken.

Er dient te worden nagedacht over de veiligheid. Veel verkeersongevallen worden veroorzaakt door te dicht op elkaar rijden / fietsen. Om ongevallen te voorkomen moeten fietsers een minimale afstand tot hun voorganger houden. Men noemt dit de veilige afstand. Zie onderstaande figuur.



De veilige afstand tussen een fietser en zijn voorganger hangt af van de snelheid waarmee gefietst wordt. Als beide fietsers even snel rijden, geldt:

$$A(v) = v \left(\frac{v}{188} + 0,14 \right) \text{ (formule 1)}$$

Hierin is v de snelheid van beide fietsers in km per uur en $A(v)$ de veilige afstand in meters.

$$A(v) = v \left(\frac{v}{188} + 0,14 \right) \text{ (formule 1)}$$

Vraag 2a

Twee speedbikes fietsen achter elkaar met een snelheid van 45 km per uur. De afstand tussen de twee speedbikes is 20 meter. Onderzoek of de achterste speedbike de minimale veilige afstand tot zijn voorganger aanhoudt. (3 punten)

Antwoord

1 punt: formule invullen van $v = 45$ in de formule

1 punt: Dit geeft $A = 17,...$

1 punt: De afstand tussen de twee speedbikers is 20 meter, dus hij houdt de veilig afstand aan.

Vraag 2b

Je kunt de formule van A herleiden tot een vorm zonder haakjes. Met behulp van de informatie in de figuur kun je vervolgens een formule opstellen van de hoeveelheid wegdek W in meters die een fietser nodig heeft als hij de veilige afstand aanhoudt. We gaan ervan uit dat de lengte van een fiets 1,80 meter is.

De formule van $W(v)$ is te schrijven in de vorm $W(v) = \dots * v^2 + \dots * v + \dots$

Stel de formule van W op en herleid de formule tot de bovenstaande vorm, waarbij op de puntjes getallen staan. Geef deze getallen in twee decimalen. **(3 punten)**

Antwoord

1 punt: $W(v) = A(v) + 1,80$

1 punt: $A(v) = \frac{v^2}{188} + 0,14v \Rightarrow \frac{1}{188}v^2 + 0,14v$

1 punt: Dus $W(v) = 0,01v^2 + 0,14v + 1,80$

Vraag 2c

Wegbeheerder Rijkswaterstaat heeft voor een bepaald stuk snelweg een formule opgesteld voor het maximale aantal fietsers dat in een bepaalde tijd over dit stuk fietssnelweg kan rijden, de zogenaamde capaciteit C . Deze formule luidt:

$$C(v) = \frac{200v}{1,8+0,045v+0,0018v^2} \text{ (formule 2)}$$

In deze formule is v de snelheid in km / per uur en $C(v)$ de capaciteit in aantal speedbikes per uur. Het blijkt dat volgens de formule de grootste waarde van $C(v)$ op dit stuk snelweg bereikt wordt bij een vrij lage snelheid.

Als er meer speedbikes gebruik gaan maken van de fietssnelweg dan volgens de capaciteit C mogelijk is, ontstaat er een fietsfile. Dit kan voorkomen worden als iedereen tijdig zijn snelheid aanpast. Op matrixborden boven de fietssnelweg geeft Rijkswaterstaat dan een maximumsnelheid aan (in hele km / per uur). Dit is de hoogste snelheid die vóórkomt dat een file ontstaat. Op dit stuk fietssnelweg moet in de avondspits de capaciteit maximaal 1250 fietsers per uur zijn om een file te voorkomen.

Bereken welke maximumsnelheid Rijkswaterstaat in deze situatie op de matrixborden aangeeft. **(6 punten)**

Antwoord

1 punt: $\frac{1250}{1} = \frac{200v}{1,8+0,045v+0,0018v^2}$ (kruislinks vermenigvuldigen)

1 punt: $1 * 200v = 1250 * 1,8 + 1250 * 0,045v + 1250 * 0,0018v^2$

1 punt: $200v = 2250 + 56,25v + 2,25v^2$

1 punt: $0 = 2250 - 143,75v + 2,25v^2$

2 punt: ABC formule geeft, $v_1 = 27,42\dots$ en $v_2 = 36,46\dots$, de matrixborden geeft 36 km per uur aan.

Vraag 2d

Bereken met behulp van de capaciteitsformule (formule 2), de maximale capaciteit van de fietssnelweg als speedbikes 45 km per uur mogen rijden. **(2 punten)**

Antwoord

$$C(v) = \frac{200v}{1,8 + 0,045v + 0,0018v^2}$$

1 punt

$$C(45) = \frac{200 * 45}{1,8 + 0,045 * 45 + 0,0018 * 45^2}$$

1 punt

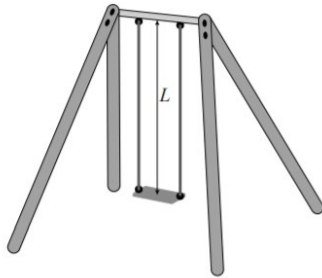
$C(45) = 1204,82$
1205 fietsen

Opgave 3: Schommel (12 punten)

In bijna elke speeltuin staat een schommel. De tijd waarin je één keer met de schommel heen en weer zwaait, is afhankelijk van de lengte van het schommeltouw. Voor de tijd T waarin je één keer heen en weer zwaait, geldt de formule:

$$T(L) = 6,28 * \sqrt{\frac{L}{9,81}} \text{ (formule 1)}$$

In deze formule is $T(L)$ de tijd in seconden en L de lengte van het schommeltouw in meters. In figuur 1 is L aangegeven.



Vraag 3a

Van een schommel is de lengte van het schommeltouw 1,80 meter. Bereken hoeveel keer per minuut je heen en weer zwaait op deze schommel. (3 punten)

Antwoord

1 punt:

$$2,69.. = 6,28 * \sqrt{\frac{L}{9,81}}$$

1 punt: $\frac{60}{2,69} \approx 22.30 \dots$

1 punt: 22 schommelingen/minuut (of nauwkeuriger)

Vraag 3b

De gegeven formule is te herleiden tot een vorm waarin,

$$L(T) = 0,249T^2 \text{ (formule 2)}$$

waar $L(T)$ de lengte van het schommeltouw in meters is en T de tijd in seconden is waarin je één keer heen en weer zwaait. Herleid de formule voor $T(L)$ tot de formule $L(T)$. (5 punten)

Antwoord

1 punt:

$$T = 6,28 * \sqrt{\frac{L}{9,81}}$$

1 punt:

$$\frac{T}{6,28} = \sqrt{\frac{L}{9,81}}$$

1 punt:

$$\left(\frac{T}{6,28}\right)^2 = \frac{L}{9,81}$$

1 punt:

$$L = \frac{9,81}{6,28^2} * T^2$$

1 punt:

$$\frac{9,81}{6,28^2} = 0,249 \dots, \text{ du bij benaderin } L(T) = 0,249T^2$$

Vraag 3c

Meneer Voortwaarts is een schommel aan het bouwen voor zijn kinderen. De houten palen en de horizontale balk zijn klaar. Het schommeltouw zal aan de horizontale balk op een hoogte van 2,70 meter boven de grond bevestigd worden. Voordat hij touw gaat kopen, moet hij bepalen welke lengtes voor het schommeltouw mogelijk zijn. Hij heeft gelezen dat het zitje in de rustpositie minimaal 0,35 meter boven de grond moet hangen en maximaal 0,63 meter. Verder wil hij dat het heen en weer zwaaien niet te snel gaat: hij wil dat één keer heen en weer zwaaien minstens 3 seconden duurt.

Onderzoek wat de minimale en maximale lengte voor het schommeltouw is om het zitje op de goede positie te hangen. Geef je antwoord in hele cm nauwkeurig. **(4 punten)**

Antwoord

Punt 1: Invullen van $T = 3$ in $L = 0,249T^2$ $L \approx 2,24$ (m) (of nauwkeuriger) (dus het schommeltouw moet minimaal 2,24 m lang zijn)

Punt 1: Het zitje moet minimaal 0,35 m boven de grond hangen, dus het schommeltouw mag maximaal ($2,70 - 0,35 =$) 2,35 m lang zijn

Punt 1: Het zitje mag maximaal 0,63 m boven de grond hangen, dus het schommeltouw moet minimaal ($2,70 - 0,63 =$) 2,07 m lang zijn

Punt 1: De minimale lengte is 2,24 m (of 224 cm), de maximale lengte is 2,35 m (of 235 cm)