Uitwerkingen Hoofdstuk 17

Wiskunde 2

17.1

a. Je weet: $2\pi = 360° \rightarrow$ maak gebruik van deze verhouding!

Gevraagd: hoeveel rad = 30° → $30° = \frac{1}{12} * 360° \rightarrow dan\ is\ bijbehorende\ aant.rad{:}\ \frac{1}{12} * 2\pi$

$\rightarrow \frac{1}{12} * 2\pi = \frac{\pi}{6}$

Oftewel, als kruistabel:

360°	30°
2π rad	? rad *gevraagde hoek in rad*

$\rightarrow \frac{360°}{2\pi} = \frac{30°}{?} \rightarrow \frac{\frac{360}{2\pi}}{30} = \frac{360}{2\pi * 30} = \frac{1}{?\,rad} \rightarrow \frac{\mathbf{2\pi * 30}}{\mathbf{360}} =? \boldsymbol{rad}$

Vereenvoudigen geeft: $\frac{2\pi*15}{180} = \frac{2\pi*5}{60} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

b. Maak steeds gebruik van dezelfde methode, maar dan alleen de dikgedrukte vergelijking uit a

$\frac{2\pi*45°}{360} =?\, rad = \frac{2\pi*15}{120} = \frac{2\pi*5}{40} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

c. $\frac{2\pi*60°}{360} =?\, rad = \frac{2\pi*6}{36} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

dit is 2x 30° (uit a.) en dus ook 2x zoveel radialen (evenredige verhouding (lineair))

d. $\frac{2\pi*70°}{360°} =?\, rad = \frac{\pi*70°}{180°} = delen\ door\ 10 = \frac{\frac{\pi*70°}{10}}{\frac{180°}{10}} = \frac{\pi*7}{18}$

$Op\ andere\ manier{:}\ bepaal\ eerst\ 10° \rightarrow \frac{2\pi*10}{360} = \frac{\pi}{18} \rightarrow$ dan x7 $= \frac{7\pi}{18}$ = zelfde

e. $\frac{2\pi*15°}{360} =?\, rad = \frac{2\pi*5°}{120} = \frac{10\pi}{120} = \frac{\pi}{12}$

Ik raad je aan om het aantal radialen van 30°, 45° en 90° uit je hoofd te leren.

17.2

a. $\frac{2\pi*20°}{360} =?\, rad = \frac{40\pi}{360} = \frac{20\pi}{180} = \frac{20\pi}{180} = \frac{10\pi}{90} = \frac{\pi}{9}$

b. $\frac{2\pi*50°}{360} =?\, rad = \frac{100\pi}{360} = \frac{10\pi}{36} = \frac{5\pi}{18}$

c. $\frac{2\pi*80°}{360} =?\, rad = \frac{160\pi}{360} = \frac{80\pi}{180} = \frac{40\pi}{90} = \frac{20\pi}{45} = \frac{4\pi}{9}$

d. $\frac{2\pi*100°}{360} =?\, rad = \frac{200\pi}{360} = \frac{20\pi}{36} = \frac{10\pi}{18} = \frac{5\pi}{9}$

e. $\frac{2\pi*150°}{360} =?\, rad = \frac{300\pi}{360} = \frac{100\pi}{120} = \frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$

17.3

a. $\frac{2\pi * 130°}{360} =? rad = \frac{260\pi}{360} = \frac{26\pi}{36} = \frac{13\pi}{18}$

b. $\frac{2\pi * 135°}{360} =? rad = \frac{270\pi}{360} = \frac{27\pi}{36} = \frac{3\pi}{4}$

c. $\frac{2\pi * 200°}{360} =? rad = \frac{400\pi}{360} = \frac{40\pi}{36} = \frac{10\pi}{9}$

d. $\frac{2\pi * 240°}{360} =? rad = \frac{480\pi}{360} = \frac{48\pi}{36} = \frac{24\pi}{18} = \frac{12\pi}{9} = \frac{4\pi}{3}$

e. $\frac{2\pi * 330°}{360} =? rad = \frac{660\pi}{360} = \frac{66\pi}{36} = \frac{22\pi}{12} = \frac{11\pi}{6}$

17.4

a.

360°	?°
2π rad	1/6 π *gevraagde hoek in rad*

$\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{\pi}{6}} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{\pi}{6} =? = \frac{360\pi}{12\pi} = \frac{180}{6} = 30°$

b. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{7}{6}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{7\pi}{6} =? = \frac{7*360\pi}{12\pi} = \frac{7*180}{6} = 7 * 30 = 210°$

c. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{1}{3}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{1\pi}{3} =? = \frac{360\pi}{6\pi} = \frac{360}{6} = 60°$

d. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{2}{3}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{2\pi}{3} =? = \frac{2*360\pi}{6\pi} = \frac{360}{3} = 120°$

e. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{1}{4}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{1\pi}{4} =? = \frac{360\pi}{8\pi} = \frac{360}{8} = \frac{180}{4} = \frac{90}{2} = 45°$

17.5

a. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{5}{4}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{5\pi}{4} =? = \frac{5*360\pi}{8\pi} = \frac{5*180}{4} = 5 * 45 = 225°$

b. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{5}{12}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{5\pi}{12} =? = \frac{5*360\pi}{24\pi} = \frac{5*180}{12} = \frac{5*90}{6} = 5 * 15 = 75°$

c. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{11}{24}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{11\pi}{24} =? = \frac{11*180}{24} = \frac{11*90}{12} = \frac{11*45}{6} = \frac{11*15}{2} = \frac{165}{2} = 82{,}5°$

d. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{15}{8}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{15\pi}{8} =? = \frac{15*360\pi}{16\pi} = \frac{15*180}{8} = \frac{15*90}{4} = \frac{15*45}{2} = \frac{675}{2} = 337{,}5°$

e. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{23}{12}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{23\pi}{12} = ? = \frac{23*360\pi}{24\pi} = \frac{23*180}{12} = \frac{23*90}{6} = \frac{23*45}{3} = 23*15 = 345°$

17.6

a. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{71}{72}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{71\pi}{72} = ? = \frac{71*360\pi}{144\pi} = \frac{71*180}{72} = \frac{71*30}{12} = \frac{71*5}{2} = \frac{355}{2} = 177{,}5°$

b. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{41}{24}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{41\pi}{24} = ? = \frac{41*180}{24} = \frac{41*90}{12} = \frac{41*30}{4} = \frac{41*15}{2} = \frac{615}{2} = 307{,}5°$

c. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{25}{18}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{25\pi}{18} = ? = \frac{25*180}{18} = \frac{25*10}{1} = 250°$

d. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{13}{24}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{13\pi}{24} = ? = \frac{13*180}{24} = \frac{13*90}{12} = \frac{13*30}{4} = \frac{13*15}{2} = \frac{195}{2} = 97{,}5°$

e. $\frac{360°}{2\pi} = \frac{?}{\frac{31}{36}\pi} \rightarrow \frac{360}{2\pi} * \frac{31\pi}{36} = ? = \frac{31*180}{36} = \frac{31*30}{6} = 31*5 = 155°$

17.7

CW = clockwise

CCW = counter clockwise

a.

$-30°$ *komt overeen met een draaiing rechtsom (met de klok mee, vanaf nu CW (clockwise))*

Dit komt weer overeen met een draaiing van $360° - 30°$ (*teken dit op de cirkel*)

$360 - 30 = 330°$ CCW (counter clockwise)

b. $445°$ *komt neer op meer dan één rondje om de eenheidscirkel*: $360°$

Haal het eerste rondje ervan af: $445 - 360 = 85°$ *is dan wat er overblijft*

Dit komt neer op precies dezelfde hoek, want na de eerste $360°$ *begint de draaiing opnieuw*

c. $-160°$ *wordt op dezelfde manier bepaald als bij a.*

$360 - 160 = 200°$

Teken ook dit op de eenheidscirkel om een beeld te vormen.

d. $700°$ *is ook weer meer dan één rondje: haal daarom het eerste rondje eraf.*

$700 - 360 = 340°$

e. $515° - 360° = 155°$

17.8

a. $Wederom\ een\ draaiing\ CW:\ -220°$

$Dit\ is\ een\ ook\ draaiing\ CCW, wanneer\ je\ 360° - 220° = 140°.\ Je\ komt\ dan\ op\ hetzelfde\ punt\ uit.$

b. $-650°\ is\ minstens$ één $maal\ de\ cirkel\ rond, maar\ dan\ CW.$

$Dat\ kun\ je\ dus\ verminderen:\ -650 - (-360) = -290°$

$De\ overgebleven\ hoek\ is\ dan\ 360° - 290° = 70°$

c. $830°\ is\ minstens$ één $maal\ de\ cirkel\ rond, CCW: verminder\ dat.$

$830 - 360 = 470° \rightarrow tweede\ rondje \rightarrow 470 - 360 = 110°$

d. $Eerste\ rondje: 1000° - 360° = 640° \rightarrow tweede\ rondje: 640 - 360 = 280°\ wat\ nogsteeds\ op\ hetzelfde\ punt\ uit\ komt.$

e. $1550°: haal\ daar\ zoveel\ mogelijk\ herhalingen\ (rondjes) vanaf \rightarrow$

$\rightarrow 1550 - 360 = 1190 \rightarrow 1190 - 360 = 830 \rightarrow 830 - 360 = 470 \rightarrow 470 - 360 = 110°$

17.9

a. $-430° \rightarrow -430 - (-360) = -70° \rightarrow$
$wat\ op\ hetzelfde\ neerkomt\ als\ een\ rondje\ CW, maar\ dan\ verminderd\ met\ die\ hoek:$

$360 - 70 = 290°$

b. $935° \rightarrow 935 - 360 = 565° \rightarrow 565 - 360 = 205°$

c. $1200° \rightarrow 1200 - 360 = 840° \rightarrow 840 - 360 = 480° \rightarrow 480 - 360 = 120°$

d. $-240°\ staat\ gelijk\ aan\ 360 - 240 = 120°\ (zelfde\ punt\ op\ de\ eenheidscirkel)$

e. $730 - 360 = 370 \rightarrow 370 - 360 = 10°$

17.10

a. Formule voor oppervlakte cirkelsegment: $\frac{\alpha}{2\pi} * \pi r^2 = A$

Voor een volledige cirkel (α = 2π) wordt $\frac{\alpha}{2\pi} = 1$ en blijft er dus $\pi r^2 = A$ over.

Als de straal (r) = 3 en middelpuntshoek (α) = 1 rad, dan:

$A = \frac{1}{2\pi} * \pi * 3^2 = \frac{1}{2} * \frac{\pi}{\pi} * 9 = 4{,}5$

b. Een halve cirkel heeft een middelpuntshoek van π radialen: $\alpha = \left(\frac{1}{2} * 2\pi\right) = \pi$

Een diameter is twee keer de straal: $2 * r = r + r = D \rightarrow r = \frac{D}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{\alpha}{2\pi} * \pi r^2 = A \rightarrow$ $A = \frac{\pi}{2\pi} * \pi * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} * \pi * \frac{1}{4} = \frac{1}{8}\pi$

c. Formule voor omtrek cirkel: $2 * \pi * r = C$

Formule voor oppervlakte cirkel: $\pi r^2 = A$ (volledige cirkel)

Waarbij gegeven is dat $A = 1 \rightarrow \pi r^2 = 1 \rightarrow r^2 = \frac{1}{\pi} \rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

Negatieve waarde voor een oppervlak is fysiek niet mogelijk; neem de positieve waarde aan.

Dan is de omtrek: $C = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 2\pi * \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} = 2\pi * \pi^{-\frac{1}{2}} = 2\pi^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\pi}$

17.12

a. $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ wil zeggen: wat is de waarde van de sinus (de verticale as op de eenheidscirkel) bij een verdraaiing/hoek van $\frac{2}{3}\pi$ CCW.

Bij 0 radialen is de sinus ook nul en de cosinus (de horizontale as) 1. Bij een kwart cirkel $\left(\frac{1}{2}\pi\right)$, of 90 graden, is de sinus 1 en de cosinus 0.

De waarde van $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ is in de tabel op de bijbehorende theoriepagina te vinden $\rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Dit kun je ook aflezen op de y-as (sinus-as) in de eenheidscirkel, bij een hoek van $\frac{1}{3}\pi$ of $\frac{2}{3}\pi$

M.b.v. symmetrie in y-as is te bepalen dat: $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Dit is af te lezen van de eenheidscirkel en de beide punten moeten wel gelijk zijn aangezien de hoekverdraaiing van π evenredig in drie stukken op te delen is en daarom op dezelfde hoogte moeten zitten (symmetrisch in de y-as).

b. $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \rightarrow Voor \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\ is\ bekend{:}\ \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (leid dit af uit de positie op de eenheidscirkel)

$\rightarrow \cos\left(\frac{2}{4}\pi\right) = 0$ en is weer een achtste rondje verder $\rightarrow$

$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\ heeft\ dezelfde\ lengte\ als \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$

$maar\ dan\ andere\ kant\ op\ (projectie\ op\ negatieve\ as) \rightarrow\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c. Een verdraaiing van $\frac{11}{6}\pi$ is bijna de cirkel rond, op $\frac{1}{6}\pi$ na. Het staat dus gelijk aan een verdraaiing van $-\frac{1}{6}\pi$. De cosinus is symmetrisch (gespiegeld) over de horizontale as, en heeft dus dezelfde waarde $\alpha = \frac{1}{6}\pi$. Dit is dus $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d. $\tan\frac{5}{4}\pi = \tan\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)}{\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)} = \cdots$

spiegelen t.o.v. de y-as

spiegelen t.o.v. de x-as

$\rightarrow \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -1 * \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -1 * \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\rightarrow \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = spiegelen\ in\ x - as = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -1 * \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -1 * \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\rightarrow \tan\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$

e. $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\ vanwege\ symmetrie\ y - as \rightarrow \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

17.13

a. $\sin(3\pi) = \sin(\pi)\ want\ na\ 2\pi\ verdraaiing\ begint\ het\ cirkelverloop\ weer\ overnieuw$

$\rightarrow \sin(\pi) = 0\ zoals\ af\ te\ lezen\ van\ de\ eenheidscirkel$

b. $\tan(7\pi) = \tan(7\pi - 2\pi - 2\pi - 2\pi) = \tan(\pi) = \frac{\sin(\pi)}{\cos(\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$

c. $\cos(-5\pi) = \cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$

d. $\tan(12\pi) = \tan(2\pi) = \tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$

e. $\sin(-5\pi) = \sin(-\pi) = \sin(\pi) = 0$

17.14

a. $sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -1 * \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \rightarrow \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \rightarrow\ -1 * \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -1 * \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b. $\tan\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \tan\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}{\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} = \frac{-1*\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)} = \frac{-1*\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -1$

c. $\cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = \ \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)\ wat\ inhoudt\ \frac{1}{6}\pi\ na\ \pi.$

$cos\pi = -1 \rightarrow Daarna\ loopt\ de\ cosinus\ weer\ terug\ naar\ 0 \rightarrow\ dus\ \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)\ is\ neg.$

$\rightarrow \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \rightarrow dus\text{: } \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d. $\tan\left(-\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(-\frac{5}{3}\pi\right)}{\cos\left(-\frac{5}{3}\pi\right)} = \frac{-1*\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)}{\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)} = \frac{-1*\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)}{\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{-1*-1*\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

e. $sin\left(\frac{13}{4}\pi\right)\ = \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\ want\ er\ is\ 2\pi = \frac{8}{4}\pi\ \ uit\ te\ halen$

$\rightarrow \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$ i.v.m. symmetrie t.o.v. y-as

$\rightarrow \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -1 * \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

17.15

a. $\tan\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)}{\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)} = \frac{\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)}{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{-1*\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{-1*\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{-1*\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

b. $\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -1 * \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -1 * \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \rightarrow\ symmetrie\ t.o.v.de\ y - as \rightarrow -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c. $\cos\left(\frac{11}{3}\pi\right) \rightarrow \frac{6}{3}\pi = 2\pi \rightarrow \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

d. $\tan\left(-\frac{15}{4}\pi\right) = \tan\left(-3\frac{3}{4}\pi\right) \rightarrow \tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \rightarrow\ \ (herhaalt\ zichzelf\ weer\ na\ \pi)$

$\rightarrow \tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \rightarrow\ \tan\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 1$

e. $\cos\left(-\frac{23}{6}\pi\right) = \cos\left(-3\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) \rightarrow dus\ bijna\ een\ rondje\ CW\ \ (2\pi) \rightarrow$

$\rightarrow \cos\left(-1\frac{5}{6}\ \pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

met de klok mee

17.16

De beweging over de eenheidscirkel begint na 2π (een heel rondje) weer opnieuw; dit kun je dus uit de verdraaiing halen.

a. $\cos(13\pi) = \cos(6 * 2\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1$

b. $\tan(17\pi) = \tan(8 * 2\pi + \pi) = \tan(\pi) = 0$

c. $\sin(-7\pi) = \sin(-3 * 2\pi - \pi) = \sin(-\pi) = 0$

d. $\tan(11\pi) = \tan(5 * 2\pi + \pi) = \tan(\pi)$

e. $\cos(-8\pi) = \cos(-4 * 2\pi) = \cos(0) = 1$

17.17

Vanwege symmetrie: $\sin(-x) = -\sin(x)\ en\ \cos(-x) = \cos(x)$

a. $\sin\left(\frac{23}{6}\pi\right) = \sin\left(3\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -1 * \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

b. $\tan\left(-\frac{17}{4}\pi\right) = \tan\left(-4\frac{1}{4}\pi\right) = \tan\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}{\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -1$

c. $\sin\left(-\frac{7}{3}\pi\right) = \sin\left(-2\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d. $\tan\left(-\frac{25}{6}\pi\right) = \tan\left(-4\frac{1}{6}\pi\right) = \tan\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{-\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-1\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

e. $\sin\left(\frac{23}{4}\pi\right) = \sin\left(5\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

17.18

Zie bladzijde 143 van het boek, en zie de volgende vergelijking (definitie van de tangens):

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Tussen 0 en ½ π radialen loopt de verhouding van $\frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$ tot $\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{1}{0^+} = \infty$

Van α > ½ π t/m α = π radialen loopt de verhouding van $\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ tot $\frac{\sin(\pi)}{\cos(\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$

Met 0^- bedoel ik dat de waarde net voor de 0 zit. Het getal is oneindig klein, maar wel negatief.

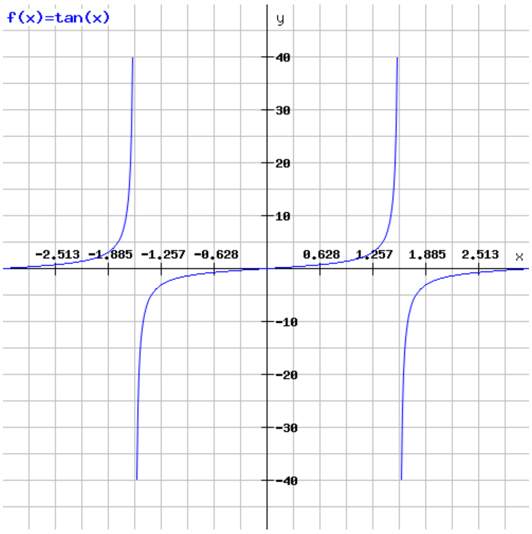
Van α > π tot 3/2 π radialen loopt de verhouding van $\frac{\sin(\pi)}{\cos(\pi)} = 0$ tot $\rightarrow \frac{\sin(\frac{3}{2}\pi)}{\cos(\frac{3}{2}\pi)} = \frac{-1}{0^-} = \frac{-1}{-1} * \frac{1}{0} = \infty$

En van 3/2 π tot 2 π loopt de waarde van de tangens van $\frac{\sin(\frac{3}{2}\pi)}{\cos(\frac{3}{2}\pi)} = \frac{-1}{0} = -\infty$ naar $\frac{\sin(2\pi)}{\cos(2\pi)} = \frac{0}{1} = 0$

Daarna eindigt het verloop daar waar het begonnen was: $\frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$

Daarmee zijn de grenzen van de tangens: $-\infty \leq \tan(\alpha) \leq \infty$

Plaatje:



Hier valt te zien dat de tangens verticale asymptoten heeft op x = -π/2 en x = π/2: de tangens zal deze punten nooit bereiken, maar de waarden vlak hiervoor zijn wel oneindig groot. Op $\pi/4$ radialen zijn de sinus en de cosinus gelijk aan elkaar en geeft dit dus de waarde 1 voor de tangens.

17.22

Gebruik de SOS-CAS-TOA-regel

a. $\sin(\alpha) = \frac{1}{5} \rightarrow \sin(\alpha) = \frac{overstaande}{schuin} \rightarrow$

$Pythagoras \rightarrow\ aanliggende = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24} = \sqrt{2 * 2 * 6} = 2\sqrt{6}$

Dan,

$\text{Cos}(\alpha) = \frac{aanliggende}{schuin} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$

$\tan(\alpha) = \frac{overstaande}{aanliggende} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{12}\sqrt{6}$

b. $\cos(\alpha) = \frac{2}{7} \rightarrow cas \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{aanliggend}{schuin}$ De overstaande: $\sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \rightarrow$

$\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{overstaande}{schuin} = \frac{3}{7}\sqrt{5}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{overstaande}{aanliggende} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

c. $\sin(\alpha) = \frac{3}{8} \rightarrow sos \rightarrow \sin(\alpha) = \frac{overstaande}{schuin} \rightarrow aanliggende = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55} \rightarrow$

$\rightarrow \cos(\alpha) = \frac{aanliggende}{schuin} = \frac{1}{8}\sqrt{55}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{overstaande}{aanliggende} = \frac{3}{\sqrt{55}} = \frac{3}{\sqrt{55}} * \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{55}} = \frac{3}{55}\sqrt{55}$

d. $\cos(\alpha) = \frac{2}{5} \rightarrow cas \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{aanliggende}{schuin} \rightarrow Pyth \rightarrow overstaande = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

$\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{overstaande}{schuin} = \frac{1}{5}\sqrt{21}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{overstaande}{aanliggende} = \frac{1}{2}\sqrt{21}$

e. $\cos(\alpha) = \frac{5}{7} \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{aanliggende}{schuin} \rightarrow Pythagoras$

$overstaande = \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{24} = \sqrt{2 * 2 * 2 * 3} = 2\sqrt{6} \rightarrow$

$\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{overstaande}{schuin} = \frac{2}{7}\sqrt{6}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{overstaande}{aanliggende} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$

17.23

a. $\sin(\alpha) = \frac{3}{4} \rightarrow \sin(\alpha) = \frac{overstaande}{schuin} \rightarrow Pyth. \rightarrow aanliggende = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

$\rightarrow \cos(\alpha) = \frac{aanliggende}{schuin} = \frac{1}{4}\sqrt{7}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{overstaande}{aanliggende} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} * \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3}{7}\sqrt{7}$

b. $\cos(\alpha) = \frac{1}{6} \rightarrow \text{overstaande} = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$

$\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{overstaande}{schuin} = \frac{1}{6}\sqrt{35}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\sqrt{35}}{1} = \sqrt{35}$

c. $\sin(\alpha) = \frac{1}{8} \rightarrow \text{ aanliggende} = \sqrt{8^2 - 1^2} = \sqrt{63} = \sqrt{3 * 3 * 7} = 3\sqrt{7}$

$\rightarrow \cos(\alpha) = \frac{3}{8}\sqrt{7}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{1}{3\sqrt{7}} * \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{21}\sqrt{7}$

d. $\cos(\alpha) = \frac{5}{8} \rightarrow$ $overstaande = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}$

$\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{1}{8}\sqrt{39}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{1}{5}\sqrt{39}$

e. $\cos(\alpha) = \frac{5}{13} \rightarrow \text{overstaande} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$

$\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{12}{13}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{12}{5}$

17.24

a. $\sin(\alpha) = \frac{6}{31} \rightarrow$ $aanliggende = \sqrt{31^2 - 6^2} = \sqrt{961 - 36} = \sqrt{925} = \sqrt{5 * 5 * 37} = 5\sqrt{37}$
$\rightarrow \cos(\alpha) = \frac{5}{31}\sqrt{37}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{6}{5\sqrt{37}} = \frac{30\sqrt{37}}{25*37} = \frac{30\sqrt{37}}{925} = \frac{6}{185}\sqrt{37}$

b. $\cos(\alpha) = \frac{4}{23} \rightarrow \text{overstaande} = \sqrt{23^2 - 4^2} = \sqrt{529 - 16} = \sqrt{513} = \sqrt{3 * 3 * 57} = 3\sqrt{57}$
$\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{513}}{23} = \frac{\sqrt{3*3*57}}{23} = \frac{3}{23}\sqrt{57}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\sqrt{513}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{57}$

c. $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \text{aanliggende} = \sqrt{3^2 - \sqrt{5}^2} = \sqrt{9 - 5} = 2$

$\rightarrow \cos(\alpha) = \frac{2}{3}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

d. $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{7}}{3} \rightarrow$ $\text{overstaande} = \sqrt{3^2 - \sqrt{7}} = \sqrt{2}$

$\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{2}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2*7}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{14}$

e. $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{10}}{4} \rightarrow$ $\text{overstaande} = \sqrt{4^2 - \sqrt{10}^2} = \sqrt{16 - 10} = \sqrt{6}$

$\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{6}$

$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{60}}{10} = \frac{\sqrt{2*2*3*5}}{10} = \frac{2\sqrt{15}}{10} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$

17.31

a. $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

Deze waarde van sinus komt voor op dezelfde plek als $\sin(x) = \frac{1}{2}$ maar dan gespiegeld in de x-as (dus nu op de negatieve y-as):

$$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} \to gebruik\, \sin(-x) = -\sin(x) \to \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

Maar dit is hetzelfde als: $2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{12}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$

De sinus heeft de waarde ½ op zowel $\frac{1}{6}\pi$ als $\frac{5}{6}\pi$ en dus is ook $\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

Dus alle oplossingen: $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ wanneer $x = \frac{11}{6}\pi + 2\pi k$ of $x = \frac{7}{6}\pi + 2\pi k$

b. $\cos(x) = \frac{1}{2}$

Volgens het tabel op blz. 141: $\cos(x) = \frac{1}{2}$ op $x = \frac{1}{3}\pi$, maar ook op $x = -\frac{1}{3}\pi$

Dit want $\cos(-x) = \cos(x)$ wat weer te maken heeft met de symmetrie van de cosinus.

$x = -\frac{1}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$

Dus, $\cos(x) = \frac{1}{2}$ wanneer $x = \frac{1}{3}\pi + 2\pi k$ en $x = \frac{5}{3}\pi + 2\pi k$

c. $\tan(x) = -1$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ en dus moeten de sinus en de cosinus dus gelijk aan elkaar zijn, op het teken na. Dit gebeurt alleen op $\sin(x) = \cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ of\ \sin(x) = \cos(x) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

Dit kan in het tweede kwadrant van de eenheidscirkel: sinus = + en cosinus = -. Of in het vierde kwadrant: sinus = - en cosinus = +. Dus,

$\tan(x) = -1$ wanneer $x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$ of $x = \frac{7}{4}\pi + 2\pi k$

17.32

a. $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

De sinus neemt deze waarde aan op $\frac{1}{4}\pi$ volgens de tabel. Dan geldt dit ook op $\frac{3}{4}\pi$. (Zie de eenheidscirkel). Daarom:

$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ wanneer $x = \frac{1}{4}\pi + 2\pi k$ of $x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$

b. $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

De cosinus neemt de waarde $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ aan op $\frac{1}{6}\pi$ radialen. De waarde $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ligt op dezelfde hoogte, maar in het tweede kwadrant: andere kant van de verticale as. Omdat het op dezelfde hoogte ligt is de hoek dan $\frac{5}{6}\pi$ radialen. Deze waarde wordt ook aangenomen in het derde kwadrant, hetzelfde punt, maar dan gespiegeld met de x-as. Dit is dus $\frac{2}{6}\pi$ verder: $\frac{7}{6}\pi$

Daarom: $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ wanneer $x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ of $x = \frac{7}{6}\pi + 2\pi k$

c. $\tan(x) = -\sqrt{3}$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \rightarrow -\sqrt{3}\ wanneer \sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ en \cos(x) = -\frac{1}{2}$

$Of: wanneer \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ en \cos(x) = \frac{1}{2}$

Dit is in het tweede kwadrant: sinus positief en cosinus negatief op $\frac{2}{3}\pi$

En dit is in het vierde kwadrant: sinus negatief en cosinus positief op $\frac{5}{6}\pi$

Daarom: $\tan(x) = -\sqrt{3}$ als $x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$ of $x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$

17.33

a. $\tan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Dit is volgens de tabel op $\frac{1}{6}\pi$ radialen. Dit zit in het eerste kwadrant. In het derde kwadrant nemen de sinus en de cosinus dezelfde waarden aan, maar dan beide negatief. Omdat je dan (volgens de definitie van de tangens) een negatieve waarde op een negatieve waarde deelt, wordt dit weer positief en kom je op exact dezelfde waarde uit. Hetzelfde punt, maar dan in het derde kwadrant zit op $\frac{7}{6}\pi$. Dit omdat het punt dan even ver van de horizontale as vandaan zit (de cosinus) op de eenheidscirkel, namelijk $\frac{1}{6}\pi$. Maar dan aan de andere kant.

Daarom: $\tan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ als $x = \frac{1}{6}\pi + 2\pi k$ of $x = \frac{7}{6}\pi + 2\pi k$

b. $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

De negatieve waarden van de cosinus zitten aan de linker kant van de eenheidscirkel, en dus in het tweede en derde kwadrant. De cosinus neemt deze waarde aan op dezelfde hoogte als op $+\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dit zit dus op $\frac{3}{4}\pi$. Het andere punt voor deze waarde zit een half pi draaiing verder, namelijk op $\frac{5}{4}\pi$. Daarom: $\cos(x) = \frac{1}{2}$ wanneer $x = \frac{1}{3}\pi + 2\pi k$ en $x = \frac{5}{3}\pi + 2\pi k$

c. $\cos(x) = 0$

Op nul radialen is de sinus nul en de cosinus 1.

Op $\frac{1}{2}\pi$ radialen is de sinus 1 en de cosinus 0

Op een halve cirkel afstand hiervan (π rad) is de cosinus weer nul, maar nu met sinus = -1.

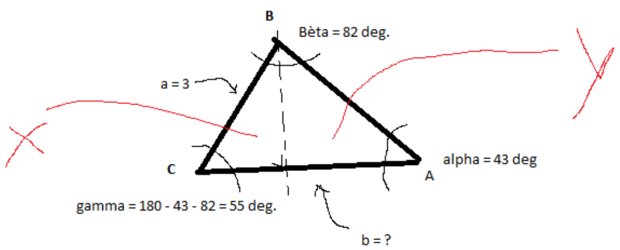
Dus, $\cos(x) = 0$ wanneer $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ en $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ Samengevoegd: $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$

17.58

N.B.
Deze vraagstukken moeten worden gemaakt met behulp van een rekenmachine/calculator, dus ze komen niet op deze manier terug op het tentamen.
Op het tentamen zal bij dit soort opgaven gebruik gemaakt worden van hoeken waarvan we de sinus en de cosinus kunnen bepalen zonder rekenmachine.
Hierbij toch de uitwerking van deze vraagstukken om een idee te geven hoe je het e.e.a. aanpakt, omdat de uitwerking van deze vraagstukken namelijk verder hetzelfde is.

Pas goed op met de instellingen van je calculator: er wordt vaak geswitcht tussen hoeken uitgedrukt in radialen en in graden!

a. Gevraagd: lengte van b en oppervlakte O:



Noem de gestreepte lijn D: deel de driehoek op in twee rechte driehoeken: CBB’ (X) en ABB’ (Y) waarbij B’ het punt tegenover B is.

O_X = (CB’ × BB’)/2

O_Y = (BB’ × AB’)/2

Of met oppervlakteformule...

Sinusregel:

Lijnstuk $b = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \rightarrow \frac{3}{\sin(43)} = \frac{b}{\sin(82)} \rightarrow b = \frac{3*\sin(82)}{\sin(43)} \approx 4{,}3560$

Lijnlengte BB’: $\sin(\gamma) = \frac{BB\prime}{3} \rightarrow BB' = 3 * \sin(55) \approx 2{,}4575$

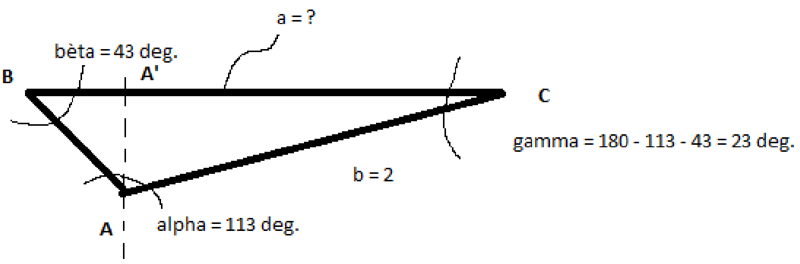
Lijnlengte CB’: $a^2 - BB'^2 = CB'^2 \rightarrow 3^2 - 2{,}46^2 \approx 2{,}9607 \rightarrow CB' = \sqrt{2{,}95} \approx 1{,}7207$

$$O_X = \frac{1{,}72 * 2{,}46}{2} = 2{,}1143$$

$$O_Y = \frac{(4{,}36 - 1{,}72) * 2{,}46}{2} \approx 3{,}2381$$

$$O = 2{,}1143 + 3{,}2381 = 5{,}3524$$

b. Gevraagd: lengte van a en oppervlakte O:



Lijnstuk a:

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \rightarrow \frac{2}{\sin(43)} = \frac{a}{\sin(113)} \rightarrow a = \frac{2*\sin(113)}{\sin(43)} \approx 2{,}6994$$

Lijnstuk c:

$$\frac{c}{\sin(23)} = \frac{2}{\sin(43)} \rightarrow c = \frac{2*\sin(23)}{\sin(43)} \approx 1{,}1458$$

Lijnstuk AA':

$$\sin(43) = \frac{AA'}{c} \rightarrow AA' = 1{,}1458 * \sin(43) \approx 0{,}7815$$

Lijnstuk A'B:

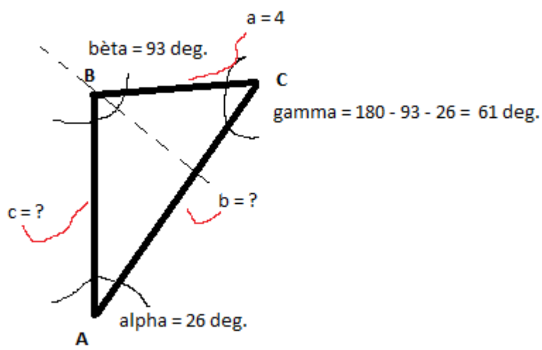
$$\sqrt{c^2 - AA'} = \sqrt{0{,}71} \approx 0{,}8379$$

Dan, oppervlakte van driehoek ABA' = $\frac{0{,}8379*0{,}7815}{2} = 0{,}3274$

Enzo, oppervlakte van driehoek AA'C = $\frac{(2{,}6994-0{,}8379)*0{,}7815}{2} = 0{,}7156$

Gezamelijke oppervlakte (driehoek ABC) = 0,3274 + 0,7156 = 1,043

c. Gevraagd: lengte van c en oppervlakte O:



Lijnstuk c:

$$\frac{c}{\sin(61)} = \frac{4}{\sin(26)} \to c = \frac{4*\sin(61)}{\sin(26)} = 7{,}9806$$

Lijnstuk b:

$$\frac{b}{\sin(93)} = \frac{4}{\sin(26)} \to b = \frac{4*\sin(93)}{\sin(26)} = 9{,}1122$$

Lijnstuk CB':

$$\cos(\gamma) = \frac{aanliggende}{schuin} \to \cos(61) = \frac{CB'}{4} \to 4*\cos(61) = CB' = 1{,}9392$$

Lijnstuk AB':

$$AB' = AC - CB' = b - CB' = 9{,}1122 - 1{,}9382 = 7{,}174$$

Lijnstuk BB':

$$\sin(61) = \frac{BB'}{4} \to BB' = 4*\sin(61) = 3{,}4985$$

Oppervlakte driehoek ABB':

$$\frac{AB' * BB'}{2} = \frac{7{,}27 * 3{,}50}{2} = 12{,}7225$$

Oppervlakte driehoek BB'C:

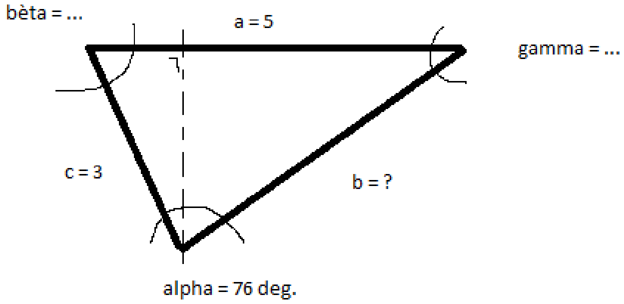
$$\frac{B'C * BB'}{2} = \frac{1{,}94 * 3{,}50}{2} = 3{,}395$$

Oppervlakte van gehele driehoek ABC:

12,7225 + 3,395 = 16,1175

$$\frac{1}{2} * b * c * \sin(\alpha) = \frac{1}{2} * 9{,}1122 * 7{,}9806 * \sin(26) = 15{,}9394$$

d. Gevraagd: hoek γ en oppervlakte O:



Hoek γ:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \rightarrow \frac{5}{\sin(76)} = \frac{3}{\sin(\gamma)} \rightarrow \sin(\gamma) = \frac{3 * \sin(76)}{5} = 0{,}5822 \rightarrow$$

$$\rightarrow \ \gamma = \arcsin(0{,}5822) = 35{,}6038 \ graden$$

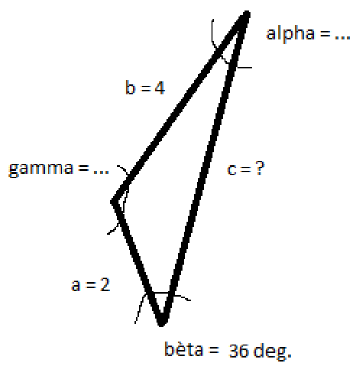
Hoek β:

$$180 - 35{,}6038 - 76 = 68{,}3962 \ graden$$

Oppervlakte:

$$\frac{1}{2} * c * a * \sin(\beta) = \frac{1}{2} * 3 * 5 * \sin(68{,}3962) = 6{,}9731$$

e. Gevraagd: hoek α en oppervlakte O:

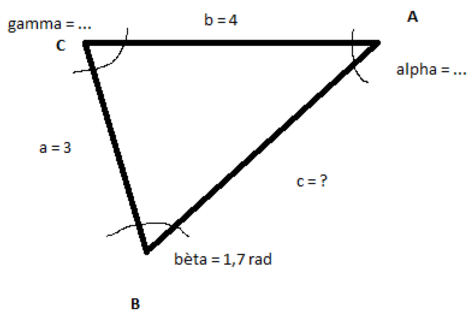


Hoek α:

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \rightarrow \frac{4}{\sin(36)} = \frac{2}{\sin(\alpha)} \rightarrow \sin(\alpha) = \frac{2 * \sin(36)}{4} = 0{,}2939 \rightarrow$$

$$\rightarrow \ \alpha = \arcsin(0{,}2939) = 17{,}0911 \ graden$$

f. Gevraagd: hoek γ en oppervlakte O:



Stel hier je rekenmachine in op rekenen met radialen.

Hoek α:

$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \rightarrow \frac{4}{\sin(1{,}7)} = \frac{3}{\sin(\alpha)} \rightarrow \sin(\alpha) = \frac{3 * \sin(1{,}7)}{4} = 0{,}7437 \rightarrow \alpha = \arcsin(0{,}7437) \approx 0{,}84\ rad$

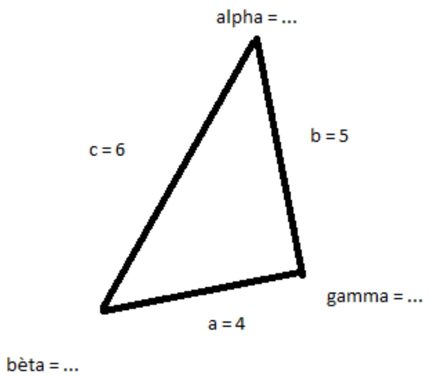
Hoek γ:

Som van hoeken is altijd 180° = π radialen, dan: π – 0,8387 – 1,7 ≈ 0,6029 rad

Oppervlakte:

$$\frac{1}{2} * a * b * \sin(\gamma) = \frac{1}{2} * 3 * 4 * \sin(0{,}6029) = 3{,}40$$

g. Gevraagd: hoek γ en oppervlakte O:



De cosinusregel vraagt enkel één hoek op bij bepaalde zijden, deze kan dan uitgerekend worden:

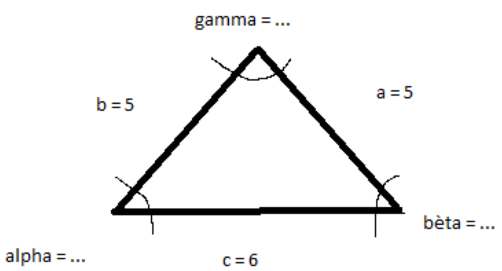
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos(\alpha)$$

ofwel,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc * \cos(\gamma) \rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{(6^2 - 5^2 - 4^2)}{-2 * 5 * 6}\right) = 85{,}22\ graden$$

Oppervlakte: $\frac{1}{2} * a * b * \sin(\gamma) = \frac{1}{2} * 4 * 5 * \sin(85{,}22) \approx 9{,}9652$

h. Gevraagd: hoek α en oppervlakte O



hoek α:

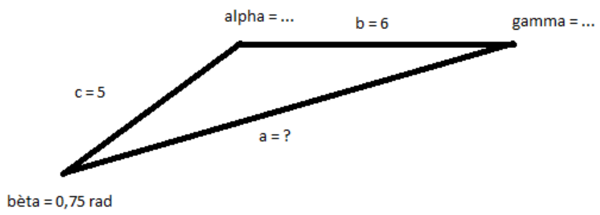
cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos(\alpha) \rightarrow \ \alpha = \arccos\left(\frac{(5^2-5^2-6^2)}{-2*5*6}\right) = 53{,}1301\ graden$

Of: $\alpha = 0{,}9273\ radialen$

Dan oppervlakte:

$$\frac{1}{2} * b * c * \sin(\alpha) = \frac{1}{2} * 5 * 6 * \sin(53{,}1301) = 12$$

i. Gevraagd: lengte a en oppervlakte O



Stel hier wederom je calculator in op rekenen met radialen.

Om lengte a te bepalen moeten eerst wat voorbereidingen getroffen worden:

Hoek gamma:

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \rightarrow \frac{6}{\sin(0{,}75)} = \frac{5}{\sin(\gamma)} \rightarrow \gamma = \arcsin\left(\frac{(5 * sin(0{,}75))}{6}\right) = 0{,}6041\ rad$$

Hoek α:

$\pi - 0{,}75 - 0{,}6041 = 1{,}7875\ rad$

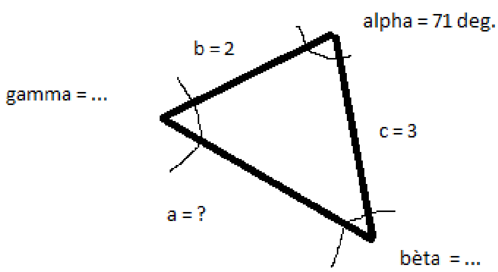
Lengte a:

$$\frac{6}{\sin(0{,}75)} = \frac{a}{\sin(1{,}7875)} \rightarrow a = \frac{6 * \sin(1{,}7875)}{\sin(0{,}75)} = 8{,}5965$$

Oppervlakte: $\frac{1}{2} * 6 * 5 * \sin(1{,}7875) = 14{,}6492$

j. Gevraagd: lengte a en oppervlakte O

Graden...



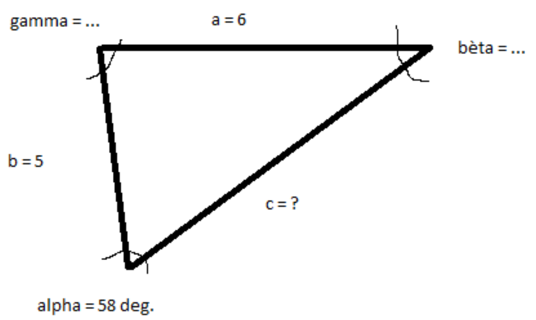
cosinusregel voor lengte a:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc * \cos(\alpha)} = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 * 2 * 3 * \cos(71)} = 3{,}0155$$

Oppervlakte:

$$\frac{1}{2} * b * c * \sin(\alpha) = \frac{1}{2} * 2 * 3 * \sin(71) = 2{,}8366$$

k. Gevraagd: lengte c en oppervlakte O



Hoek β:

$$\frac{6}{\sin(58)} = \frac{5}{\sin(\beta)} \rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{5 * sin(58)}{6}\right) = 44{,}9676\ graden$$

Hoek γ:

$$\gamma = 180 - 44{,}9676 - 58 = 77{,}0324\ graden$$

Lengte c:

$$\frac{5}{\sin(44{,}9676)} = \frac{c}{\sin(77{,}0324)} \rightarrow c = \frac{5 * \sin(77{,}0324)}{\sin(44{,}9676)} = 6{,}8946$$

Oppervlakte:

$$\frac{1}{2} * a * b * \sin(\gamma) = \frac{1}{2} * 5 * 6 * \sin(77{,}0324) = 14{,}6175$$