Uitwerking

ProefToelatingstoets Wiskunde B

Hulpmiddelen :tentamenpapier,kladpapier,
een eenvoudige rekenmachine
(dus geen grafische of programmeerbare
rekenmachine)

De te bepalen punten per opgave staan bij de opgave vermeld.

Cijfer = (som van de behaalde punten +10 punten extra)/10

Laat duidelijk zien hoe je aan het antwoord komt !!!

Opgave 1 (per onderdeel 3 punten)

per rekenfout: -1 punt, per methodefout: -2 punten

a) $-4^2 : 8 - 12 + 4 \text{ x } 2 = -16 : 8 - 12 + 4 \text{ x } 2 = -16 : 8 - 12 + 8 = -2 - 12 + 8 = -14 + 8 = -6$

b) $\dfrac{15}{16} \text{ x } \dfrac{24}{18} = \dfrac{15 \cdot 24}{16 \cdot 18} = \dfrac{5 \cdot 24}{16 \cdot 6} = \dfrac{5 \cdot 3}{2 \cdot 6} = \dfrac{5}{2 \cdot 2} = \dfrac{5}{4}$

c) $\dfrac{\frac{3}{2} - \frac{4}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 2} - \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 5}}{\frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4}} = \dfrac{\frac{15}{10} - \frac{8}{10}}{\frac{8}{12} + \frac{3}{12}} = \dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{11}{12}} = \dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{12}{11} = \dfrac{7 \cdot 12}{10 \cdot 11} = \dfrac{7 \cdot 6}{5 \cdot 11} = \dfrac{42}{55}$

Opgave 2 (per onderdeel 3 punten)

Schrijf de volgende uitdrukkingen in de standaardvorm $a\sqrt{b}$, waarin a een geheel getal of een onvereenvoudigbare breuk is en $\sqrt{b}$ een onvereenvoudigbare wortel is.

per rekenfout: -1 punt, per methodefout: -2 punten

a) $\sqrt{\frac{8}{75}} = \sqrt{\frac{2\cdot2\cdot2}{3\cdot5\cdot5}} = \sqrt{\frac{3\cdot2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot5\cdot5}} = \frac{2}{3\cdot5}\sqrt{3\cdot2} = \frac{2}{15}\sqrt{6}$

b) $\sqrt[5]{\frac{4}{9}} = \sqrt[5]{\frac{2.2}{3.3}} = \sqrt[5]{\frac{3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}} = \frac{1}{3}\sqrt[5]{3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2} = \frac{1}{3}\sqrt[5]{108}$

c) **Fout! Objecten kunnen niet worden gemaakt door veldcodes te bewerken.** x **Fout! Objecten kunnen niet worden gemaakt door veldcodes te bewerken.** x **Fout! Objecten kunnen niet worden gemaakt door veldcodes te bewerken.** $= 2\cdot3\cdot2\sqrt{6\cdot10\cdot3} = 12\sqrt{2\cdot3\cdot2\cdot5\cdot3} = 12\cdot2\cdot3\sqrt{5} = 72\sqrt{5}$

Opgave 3 (per onderdeel 3 punten)

a) Bepaal $\cos(\frac{5}{4}\pi)$

Gebruik nu $\cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (1 punt)

Er geldt $\cos(\frac{5}{4}\pi) = \cos(-\frac{3}{4}\pi) = -\cos(-\frac{1}{4}\pi) = -\cos(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (2 punten)

b) Bepaal alle oplossingen van de vergelijking $\sin(\frac{1}{2}x - 1) = -\frac{1}{2}$

Alle oplossingen van $\sin x = -\frac{1}{2}$ zijn:

$x = -\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ (0.5 punt) en $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ (0.5 punt)

Voor de oplossingen van $\sin(\frac{1}{2}x - 1) = -\frac{1}{2}$ geldt dus:

$\frac{1}{2}x-1=-\frac{1}{6}\pi+2k\pi$ (0.5 punt) en $\frac{1}{2}x-1=-\frac{5}{6}\pi+2k\pi$ (0.5 punt) .

Dit levert op:

$\frac{1}{2}x=1-\frac{1}{6}\pi+2k\pi$ en $\frac{1}{2}x=1-\frac{5}{6}\pi+2k\pi$

Hier kunnen we x uit oplossen wat oplevert:

$x=2\cdot(1-\frac{1}{6}\pi+2k\pi)=2-\frac{1}{3}\pi+4k\pi$ (0.5 punt) en

$x=2\cdot(1-\frac{5}{6}\pi+2k\pi)=2-\frac{5}{3}\pi+4k\pi$ (0.5 punt)

c) In de driehoek met hoekpunten A, B en C is α de hoek bij hoekpunt A, β de hoek bij hoekpunt B en γ de hoek bij hoekpunt C.
Verder is a de zijde BC, b de zijde AC en c de zijde AB.
Gegeven is a $=\sqrt{2}$, b $=\sqrt{6}$ en $\beta=90^\circ$.
We moeten van deze driehoek nu zijde c bepalen.

Hiervoor kunnen we de stelling van Pythagoras gebruiken.
Omdat $\beta=90^\circ$ geeft deze stelling $a^2+c^2=b^2$.
En hier dus: $(\sqrt{2})^2+c^2=(\sqrt{6})^2$ (1 punt) ,
oftewel $2+c^2=6$, zodat $c^2=6-2=4$.(1 punt)

En er geldt dus $c=2$ (1 punt).

<u>Opgave 4</u> (per onderdeel 3 punten)

per rekenfout: -1 punt, per methodefout: -2 punten

a) Schrijf als macht van 3: $\frac{3^{-2}}{\sqrt{27}}$

$$\frac{3^{-2}}{\sqrt{27}}=\frac{3^{-2}}{\sqrt{3^3}}=\frac{3^{-2}}{(3^3)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3^{-2}}{3^{\frac{3}{2}}}=3^{-2-\frac{3}{2}}=3^{-\frac{7}{2}}$$

b) Vereenvoudig de volgende breuk zoveel mogelijk: $\frac{156}{-390}$

$$\frac{156}{-390}=-\frac{156}{390}=-\frac{78}{195}=-\frac{26}{65}=-\frac{2}{5}$$

c) Werk zoveel mogelijk factoren buiten haakjes: $a^2b^3c^5-a^3b^2c^2+2a^2b^4c$

$a^2b^3c^5 - a^3b^2c^2 + 2a^2b^4c = a^2b^2c(bc^4 - ac + 2b^2)$

Opgave 5 (onderdeel a: 4 punten, onderdeel b: 5 punten)

a) Methode 1

Bepaal de vergelijking van de lijn door de punten (1,6) en (-3,4).

per fout (zowel invulfout als rekenfout): -1 punt

De vergelijking van de lijn is $(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1)$,
waarbij $(a_1, a_2) = (1,6)$ en $(b_1, b_2) = (-3,4)$.

Invullen geeft dan $(1-(-3))(y-4) = (6-4)(x-(-3))$

Dit geeft $(1+3)(y-4) = (6-4)(x+3)$.
Dus $4(y-4) = 2(x+3)$ oftewel $4y - 16 = 2x + 6$.
Dit geeft $2x - 4y = -16 - 6 = -22$.
De vergelijking van de lijn is dan dus $2x - 4y = -22$ of $x - 2y = -11$.

Methode 2

Gebruik de richtingscoëfficiënt m= $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-6}{-3-1}$ (0.5 punt)

Dit is gelijk aan $\frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ (0.5 punt)

De vergelijking van de lijn kan geschreven worden als $y = mx + n$.

Dat wordt hier dus $y = \frac{1}{2}x + n$. (1 punt)

Het punt (1,6) ligt op deze lijn dus $6 = \frac{1}{2}\cdot 1 + n = \frac{1}{2} + n$. (0.5 punt)

En dus $n = 6 - \frac{1}{2} = \frac{12}{2} - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$. (0.5 punt)

De gevraagde vergelijking van de lijn wordt dan dus $y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$ (1 punt)

Dit kan ook geschreven worden als $2y = x + 11$, oftewel $x - 2y = -11$.
Dit is natuurlijk hetzelfde antwoord als het antwoord gevonden bij methode 1.
N.B. deze 3 laatste antwoorden zijn natuurlijk allemaal goed.

b) Bepaal met kwadraatafsplitsen de coördinaten van de top van de parabool y = $3x^2-5x+2$.

Kwadraatafsplitsen geeft:

$$y=3x^2-5x+2=3(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3})$$ (1 punt)

$$=3(x^2-\frac{5}{3}x+(\frac{5}{6})^2-(\frac{5}{6})^2+\frac{2}{3})$$ (1 punt)

$$=3((x-\frac{5}{6})^2-\frac{25}{36}+\frac{24}{36})$$ (0.5 punt)

$$=3((x-\frac{5}{6})^2-\frac{1}{36})$$ (0.5 punt)

$$=3(x-\frac{5}{6})^2-\frac{1}{12}$$ (1 punt)

De top is dus: $(\frac{5}{6},-\frac{1}{12})$

(0.5 punt voor de goede x-waarde en 0.5 punt voor de goede y-waarde)

<u>Opgave 6</u> (onderdeel a: 4 punten, onderdeel b: 5 punten)

a) Los op $2(x-3)-5(x-5)\leq 3(2+x)$.

per rekenfout: -1 punt, per methodefout: -2 punten
Hierbij is bijvoorbeeld een grote fout het vergeten om te draaien van het teken, als dat moet, maar ook het ten onrechte omdraaien van het teken, als dit niet moet.

$2(x-3)-5(x-5)\leq 3(2+x)$.

We werken eerst de haakjes uit.
Dit geeft: $2x-6-5x+25\leq 6+3x$

Oftewel: $-3x+19\leq 6+3x$

Dus $-3x-3x\leq 6-19$

Dus $-6x\leq -13$

Ten slotte delen we beide zijden door –6, waardoor $\leq$ dus $\geq$ wordt, dit omdat we door een negatief getal delen.

Het antwoord wordt dan: $x \geq \frac{-13}{-6}$, dus $x \geq \frac{13}{6}$.

b) Bepaal alle oplossingen x van de volgende vergelijking: $\frac{4-3x}{1-x} - \frac{2x}{x-1} = 5$

Allereerst maken we beide breuken om slimme manier gelijknamig**:**

$\frac{4-3x}{1-x} + \frac{2x}{1-x} = 5$ (1 punt)

En dus: $\frac{4-3x+2x}{1-x} = 5$ (0.5 punt), oftewel $\frac{4-x}{1-x} = 5$ (0.5 punt)

Er geldt dan: $4 - x = 5(1-x) = 5 - 5x$.
Oftewel: $4 - x = 5 - 5x$ (0.5 punt)
En dus: $5x - x = 5 - 4$ (0.5 punt)
Dus: $4x = 1$ (0.5 punt), zodat $x = \frac{1}{4}$ (0.5 punt)

We moeten dan nog wel controleren of deze waarde niet zorgt voor een deling door 0 in de oorspronkelijke vergelijking $\frac{4-3x}{1-x} - \frac{2x}{x-1} = 5$.

Dit is niet zo, zodat $x = \frac{1}{4}$ inderdaad de oplossing is. (1 punt)

Opgave 7 (per onderdeel 3 punten)

a) Schrijf zonder haakjes: $3c(1-2c)^2$

per rekenfout: -1 punt, per methodefout: -2 punten

$3c(1-2c)^2 = 3c(1-2c)(1-2c) = 3c(1-2c-2c+4c^2) = 3c(1-4c+4c^2) = 3c - 12c^2 + 12c^3$

b) Ontbind in factoren: $b^5 - b$

$b^5 - b = b(b^4 - 1)$ (1 punt)

Dit is: $b(b^2+1)(b^2-1)$ (1 punt)

En dit is weer $b(b^2+1)(b+1)(b-1)$, wat het antwoord is. (1 punt)

c) Vul **Fout! Objecten kunnen niet worden gemaakt door veldcodes te bewerken.** en **Fout! Objecten kunnen niet worden gemaakt door veldcodes te bewerken.** in bij de formule $x(1-y)-xy^2$ en bereken de uitkomst.

per rekenfout: -1 punt, per methodefout: -2 punten

Na het invullen van deze waarden krijg je:
$(-3)(1-(-1))-(-3)(-1)^2=(-3)(1+1)-(-3)(1)=(-3)(2)-(-3)=-6+3=-3$.

Opgave 8 (9 punten)

Los het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 5 \\ x - 3y + 2z &= -4 \\ -x + 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

per rekenfout: -1 punt, per methodefout: -2 punten

Combineer eerst de bovenste 2 vergelijkingen en elimineer daaruit x:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 5 \\ x - 3y + 2z &= -4 \quad (*2) \end{aligned}$$

Dit levert op:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 5 \\ 2x - 6y + 4z &= -8 \end{aligned}$$
---------------------- −
$$5y - 3z = 13$$

Combineer daarna de onderste 2 vergelijkingen en elimineer daaruit ook weer x:

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= -4 \\ -x + 2y - z &= 3 \end{aligned}$$
----------------------- +
$$-y + z = -1$$

Combineer nu beide verkregen vergelijkingen in y en z:

$$\begin{aligned} 5y - 3z &= 13 \\ -y + z &= -1 \quad (*5) \end{aligned}$$

Dit levert op:

$$\begin{aligned} 5y - 3z &= 13 \\ -5y + 5z &= -5 \end{aligned}$$

-------------------- +

2z = 8

Dit geeft na beide zijden van de vergelijking door 2 te delen: z =4.
Vul dit in in − y + z = −1: − y + 4 = −1, dus y=4+1=5.
Vul nu de waarden van y en z in in x −3y + 2z = −4:
x −3.5 + 2.4 = −4, en dus x −15+8= −4, oftewel x=−4+15-8=3
De oplossing van het stelsel verggelijkingenis dus x =3, y = 5, z=4

<u>Opgave 9</u> (onderdeel a: 4 punten, onderdeel b: 5 punten)

a) Los op $\frac{2}{3}(x-1)+\frac{4}{5}(2-x)=\frac{1}{2}(2-3x)$.

per rekenfout: -1 punt, per methodefout: -2 punten

Vermenigvuldig beide zijden van deze vergelijking met 30
om de breuken kwijt te raken.

Dan krijg je $30(\frac{2}{3}(x-1)+\frac{4}{5}(2-x))=30(\frac{1}{2}(2-3x))$.

Dit geeft $30(\frac{2}{3}(x-1))+30(\frac{4}{5}(2-x))=30(\frac{1}{2}(2-3x))$.

Oftewel $20(x-1)+24(2-x)=15(2-3x)$

Dus $20x-20+48-24x=30-45x$.

Dus $20x-24x+45x=30+20-48$.

Oftewel $41x=2$

Zodat de oplossing dus is: $x=\frac{2}{41}$

b) Bepaal het snijpunt van de lijn 6x − 3y = 4 en de parabool $y=x^2-3x-\frac{5}{3}$.

Schrijf allereerst 6x − 3y = 4 als y=mx + n.

Dit gaat als volgt: 6x − 3y = 4 → 3y = 6x − 4 → $y=2x-\frac{4}{3}$

Om de snijpunten te bepalen stel je daarna de y-waarden gelijk aan elkaar:

$2x-\frac{4}{3}=x^2-3x-\frac{5}{3}$ (1 punt)

We brengen alles naar 1 kant van de vergelijking en lossen de vergelijking op met de abc-formule:

$x^2-2x-3x+\frac{4}{3}-\frac{5}{3}=0 \rightarrow x^2-5x-\frac{1}{3}=0$ (1 punt)

De abc-formule geeft:

$$x_{12}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-\frac{1}{3})}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{\frac{79}{3}}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{\frac{79\cdot 3}{3\cdot 3}}}{2}=\frac{5\pm\frac{1}{3}\sqrt{237}}{2}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{6}\sqrt{237}$$

(2 punten, per fout gaat er 1 punt vanaf)

Er zijn dus 2 snijpunten waarvan dit de x-waarden zijn.
De y-waarden van deze 2 snijpunten vind je door deze x-waarden in een van de 2 functies in te vullen.
De vergelijking van de lijn $y=2x-\frac{4}{3}$ is hiervoor het eenvoudigste:

Snijpunt 1 is dan:

$(\frac{5}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{237},2(\frac{5}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{237})-\frac{4}{3})=(\frac{5}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{237},\frac{11}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{237})$ (0.5 punt)

Snijpunt 2 is dan:

$(\frac{5}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{237},2(\frac{5}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{237})-\frac{4}{3})=(\frac{5}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{237},\frac{11}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{237})$ (0.5 punt)

Opgave 10 (onderdeel a: 4 punten, onderdeel b: 5 punten)

a) Bereken door middel van een staartdeling de uitkomst van 7683 gedeeld door 59.

per fout: -1 punt

```
59  /  7683 \  130
       59
       ---
       178
       177
        ----
         13
           0
          --
         13
```

Antwoord: 130 rest 13 of $130\frac{13}{59}$

b) Bepaal de GGD en het KGV van de getallen 300 en 840.

Hiervoor moeten we deze getallen eest ontbinden in priemfactoren.

Dit gaat als volgt:

300=2.2.3.5.5 (1 punt)
840=2.2.2.3.5.7 (1 punt)

Daarna kunnen we de GGD en het KGV bepalen:

GGD = 2.2.3.5 (1 punt) = 60 (0.5 punt) en
KGV = 2.2.2.3.5.5.7 (1 punt) =4200 (0.5 punt).